О статье «Нахождение точных спектров уравнения Шредингера с помощью суперсимметрии»
(Л.Э. Генденштейн, Письма в ЖЭТФ, 38:6 (1983) 299–302)

В.Э. Адлер, ИТФ им. Л.Д. Ландау

Статья посвящена приложениям следующего замечательного преобразования. Несложное вычисление показывает, что если $\psi(x,\lambda)$ общее решение уравнения

$$\psi'' = (u(x) - \lambda)\psi,$$

а $\psi_0(x)$ частное решение, отвечающее значению $\lambda = \lambda_0$, то функция

$$\tilde\psi = \psi' - w\psi, \quad w = \psi_0'/\psi_0$$

удовлетворяет уравнению того же вида, но с новым потенциалом $\tilde u = u - 2w'$. Впервые это наблюдение было сделано в работе Дарбу [1], и впоследствии переоткрыто Шрёдингером [2, 3] в контексте квантовой механики. Последовательность преобразований Дарбу описывается операторами $H_n = d^2/dx^2 - u_n$, $Q^\pm_n = d/dx \pm w_n$, связанных соотношениями факторизации

$$H_n + \lambda_n = Q^+_n Q^-_n \quad \mapsto \quad H_{n+1} + \lambda_n = Q^-_n Q^+_n,$$

что эквивалентно цепочке дифференциально-разностных уравнений

$$u_n = w_n' + w_n^2 + \lambda_n, \quad w_n' + w_{n+1}' = w_n^2 - w_{n+1}^2 + \lambda_n - \lambda_{n+1}.$$

Любое решение этих уравнений порождает семейство операторов H_n с ψ-функциями, явно вычисляемыми при всех $\lambda = \lambda_n$; операторы $Q^\pm_n$ играют роль операторов рождения-уничтожения. Как оказалось, практически все точно-решаемые модели квантовой механики (гармонический осциллятор, задача Кеплера, сферические гармоники, безотражательные потенциалы, потенциалы Морса, Пёшля–Теллера и т.д.) допускают единообразное описание в рамках этого метода [4, 5]. При этом,

> *функции w_n, отвечающие разным n, имеют один и тот же вид и отличаются только значениями параметров.*

Формулировка этого свойства *форм-инвариантности* и является основным результатом работы Генденштейна. В дальнейшем, эта идея получила развитие в работах Шабата, Веселова, Спиридонова [6, 7, 8] и др., в которых были введены новые семейства точно-решаемых потенциалов (в отличие от рассматривавшихся ранее, они выражаются не через элементарные функции, а через трансценденты Пенлеве и их обобщения).

Преобразование Дарбу допускает обобщение и для нестационарного уравнения Шрёдингера, и для других спектральных задач. Следует отметить его прямую связь с суперсимметрией [9, 10, 11] и с преобразованиями Бэклунда для нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния [12, 13, 7]. Развитие этих теорий, происходившее в 1970–90 гг., шло параллельно и рассматриваемая статья оказала заметное влияние на эти исследования.

[1] G. Darboux. Sur une proposition relative aux équations linéaires. *Compt. Rend. Acad. Sci.* **94** (1882) 1456–1459. [arXiv:physics/9908003]

[2] E. Schrödinger. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc. Roy. Irish Acad.* ***A 46*** (1940/1941) 9–16. [Перевод: Э. Шредингер, Избранные труды по квантовой механике, М.: Наука, 1976]

[3] E. Schrödinger. Further studies on solving eigenvalue problems by factorization. *Proc. Roy. Irish Acad.* **A 46** (1940/1941) 183–206.

[4] L. Infeld, T.E. Hull. The factorization method. *Rev. Modern Phys.* **23:1** (1951) 21–68. [Перевод: "Математика" **10:3** (1966) 39]

[5] M.M. Crum. Associated Sturm-Liouville systems. *Quart. J. Math. Oxford Ser. 2* **6** (1955) 121–127.

[6] A.B. Shabat. The infinite-dimensional dressing dynamical system. *Inverse Problems* **8** (1992) 303–308.

[7] А.П. Веселов, А.Б. Шабат. Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шредингера. *Функц. анализ* **27:2** (1993) 1–21.

[8] V. Spiridonov. Exactly solvable potentials and quantum algebras. *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 398–401.

[9] E. Witten. Dynamical breaking of supersymmetry. *Nucl. Phys. B* **188:3** (1981) 513–554.

[10] Л.Э. Генденштейн, И.В. Криве. Суперсимметрия в квантовой механике. *Усп. физ. наук* **146:4** (1985) 553–590.

[11] В.Г. Багров, Б.Ф. Самсонов. Преобразование Дарбу, факторизация, суперсимметрия в одномерной квантовой механике. *Теор. Мат. Физ.* **104:2** (1995) 356–367.

[12] H.D. Wahlquist, F.B. Estabrook. Bäcklund transformations for solutions of the Korteweg–de Vries equation. *Phys. Rev. Let.* **31:23** (1973) 1386–1390.

[13] V.B. Matveev. Darboux transformation and explicit solutions of the Kadomtcev-Petviaschvily equation, depending on functional parameters. *Lett. Math. Phys.* **3:3** (1979) 213–216.