Письма в ЖЭТФ, том 67, вып.6, стр.383 - 386

КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ БЮРГЕРСА

С.Л. Шалимов

Объединенный институт физики Земли

123810 Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 декабря 1997 г.

После переработки 13 февраля 1998 г.

С использованием структурной функции третьего порядка получено асимптотическое выражение для стационарного спектра энергии в диссипативной области турбулентности Бюргерса, возбуждаемой случайной внешней силой. Показано, что в отличие от случая турбулентности, описываемой однородным уравнением Бюргерса, спектр содержит параметр, характеризующий перекачку энергии в мелкомасштабную область.

PACS: 47.27.Gs

Важным примером возникновения стационарной турбулентности служит турбулентность Бюргерса (ТБ), возбуждаемая случайной внешней силой и описываемая неоднородным одномерным уравнением Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{1}$$

где $f(x,t)$ – гауссово поле с корреляционной функцией

$$< f(x,t)f(x+r,t+s) >= F(r)\delta(s).$$

Сравнительно недавно [1] был проведен численный эксперимент, где в результате решения уравнения (1) исследован спектр в диссипативной области ТБ, который был сопоставлен с известным (см., например, [2]) асимптотическим выражением для спектра ТБ в этой области

$$E(k)=\frac{2\pi\nu^2}{L}\exp\left(-\frac{\pi\nu}{V}k\right), \tag{2}$$

где L – внешний масштаб, ν – кинематическая вязкость, V – скачок скорости на ударной волне. Было показано [1], что с ростом волнового числа в диссипативной области численное решение убывает быстрее, чем асимптотика (2).

Заметим, что последняя формула получена из однородного уравнения Бюргерса. Мелкомасштабный спектр (2) в этом случае характеризуется крупномасштабными параметрами, но не содержит никаких сведений о передаче энергии по спектру. В отличие от формы спектра (2), в настоящей работе аналитически получено асимптотическое выражение для стационарного спектра в диссипативной области ТБ, описываемой уравнением (1), которое содержит параметр, характеризующий перекачку энергии в мелкие масштабы. Наличие этого параметра позволяет интерпретировать более быстрое убывание спектра в диссипативной области.

Для корреляционной функции статистически однородной стационарной турбулентности из уравнения (1) следует соотношение, аналогичное уравнению Кармана–Ховарта теории гидродинамической турбулентности [3,4]

$$\frac{1}{6}\frac{\partial S_3(r)}{\partial r} - \nu\frac{\partial^2 S_2(r)}{\partial r^2} = -(< f(x)u(x+r) > + < f(x+r)u(x) >), \tag{3}$$

где $S_n(r) =< [u(x+r)-u(x)]^n >$. Правую часть (3) можно выразить через коррелятор внешней силы, используя формулу Фуруцу – Новикова [5]

$$< fu[f] >= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} < f(x,t)f(x_1,t_1) > \left\langle \frac{\delta u[f]}{\delta f(x_1,t_1)dx_1dt_1} \right\rangle dx_1dt_1,$$

с учетом

$$\frac{\delta u(x,t)}{\delta f(x_1,t)dx_1dt} = \frac{1}{2}\delta(x_1 - x).$$

В результате после интегрирования (3) получим

$$S_3 = 6\nu\frac{\partial S_2}{\partial r} - 6\int_0^r F(r')dr', \tag{4}$$

причем коррелятор внешней силы можно записать в виде [5]

$$F(r) = 2\epsilon\phi(r/L),$$

где L – внешний масштаб турбулентности, $\phi(r/L)$ – безразмерная функция, такая, что при $L \to \infty$: $\phi(r/L) \to \phi(0) = 1$, $\epsilon \equiv \nu < (\partial u/\partial r)^2 > = < fu >$ – средняя скорость диссипации энергии, которая определяет статистические свойства случайной внешней силы f.

Раскладывая функцию $\phi(r/L)$ в ряд и учитывая четность, из (4) при $r << L$ получим

$$S_3 = 6\nu\frac{\partial S_2}{\partial r} - 12\epsilon r\left(1 - \frac{1}{3}(\frac{r}{L})^2 + O(\frac{r}{L})^4\right). \tag{5}$$

Используя параметр $S =< (\partial u/\partial r)^3 > / < (\partial u/\partial r)^2 >^{3/2}$ – асимметрию поля скорости в пределе $r \to 0$, имеем

$$S_3 = -S\left(\frac{\epsilon}{\nu}\right)^{3/2} r^3 + O(r^5). \tag{6}$$

Из (5) и (6) находим

$$S_2 = -\frac{S}{24\nu}\left(\frac{\epsilon}{\nu}\right)^{3/2} r^4 - \frac{\epsilon}{6\nu L^2}r^4 + \left(\frac{\epsilon}{\nu}\right) r^2 + O(r^6), \tag{7}$$

если асимметрию можно считать постоянной величиной, чему можно удовлетворить для стационарной турбулентности, возбуждаемой случайной внешней силой, при $r << \delta = \nu/ < (u^2) >^{1/2}$, где δ – характерный масштаб ударной волны (то есть в данном случае – масштаб диссипации) [2]. Заметим, что асимметрия поля скоростей соответствует наличию нелинейного взаимодействия между модами, что приводит к формированию инерционной и диссипативной областей спектра [3]. В отсутствие асимметрии спектр будет состоять из дельта-функций и ее производных в источнике (это следует из (5) при достаточно большом масштабе L и связи S_2 со спектром энергии; см. ниже).

Структурная функция S_2 связана с корреляционной функцией по формуле $S_2 = 2[B(0) - B(r)]$, откуда с учетом (7) в безразмерном виде получим

$$\hat{B}(\hat{r}) = \frac{B(r)}{B(0)} = 1 - \hat{S}_2 = 1 - \beta^2\left(\hat{r}^2 - \frac{\hat{r}^4}{\alpha^2}\right) + O(\hat{r}^6), \tag{8}$$

где $\hat{r} = r/\delta$, $\hat{S}_2 \equiv S_2/2u_0^2$, $u_0^2/2$ – средняя энергия, $L = u_0^3/\epsilon$, $1/\alpha^2 = (S/24)(\delta^2\epsilon^{1/2}/\nu^{3/2}) + (1/6)(\delta/L)^2$, $\beta^2 = (1/2)(\delta^2\epsilon^{1/3}/L^{2/3}\nu)$.

В свою очередь, нормированный спектр энергии связан с корреляционной функцией по формуле

$$\hat{E}(\hat{k}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\hat{k}\hat{r})\hat{B}(\hat{r})d\hat{r}. \tag{9}$$

Здесь подынтегральная функция $\hat{B}$ представлена знакопеременным рядом (8). Применяя преобразование $w = \hat{r}^2/(\gamma+\hat{r}^2)$, $\hat{r}^2 = \gamma w/(1-w)$, где γ – некоторая постоянная, или с помощью паде-аппроксимации [6] можно показать, что радиус сходимости этого ряда определяется расстоянием до ближайшей особой точки, которая находится на отрицательной действительной оси $\hat{r}^2$.

Поскольку при $\hat{r} > 1$ (что соответствует инерционному интервалу) имеем [2] $\hat{S}_2 \sim C\hat{r}$, то сращивание асимптотических разложений (см., например, [3,7]) позволяет рассматривать разложение $\hat{S}_2$ в (8) как внутреннее разложение функции $\hat{S}_2 = \hat{r}^2/(1 + 2\hat{r}^2/\alpha^2)^{1/2}$. Заметим, что для сращивания более высокого порядка необходимы последующие члены ряда [8], однако, учитывая, что для вещественного $\hat{r} = O(\alpha)$ полученная аппроксимация является вполне определенной функцией, и интересуясь только далекой диссипативной областью спектра, можно полагать, что уточнение аппроксимации не будет заметно сказываться на форме спектра из-за довольно резкого его изменения в сторону больших волновых чисел.

Следовательно, используя последнее выражение для $\hat{S}_2$, получаем

$$\hat{B}(\hat{r}) = 1 - \beta^2\frac{\hat{r}^2}{(1 + 2\hat{r}^2/\alpha^2)^{1/2}}.$$

Ограничиваясь только диссипативной областью спектра и пренебрегая влиянием источника, можно написать

$$\hat{E}(\hat{k}) \sim \beta^2\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial\hat{k}^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\hat{k}\hat{r})}{(1 + 2\hat{r}^2/\alpha^2)^{1/2}}d\hat{r} = \frac{\alpha^3\beta^2}{2^{3/2}\pi}\left(K_0(k_1) + \frac{1}{k_1}K_1(k_1)\right), \tag{10}$$

где $k_1 = \alpha\hat{k}/\sqrt{2}$, K_ν – модифицированная функция Бесселя порядка ν. При $k_1 >> 1$ получим искомую асимптотику спектра

$$\hat{E}(\hat{k}) \sim \frac{\alpha^3\beta^2\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{1}{k_1^{1/2}} + \frac{1}{k_1^{3/2}}\right)\exp(-k_1), \tag{11}$$

или

$$E(k) \sim \frac{\sqrt{\pi}\alpha^3\delta^2\epsilon}{8\nu}\left(\frac{1}{(\alpha\delta k/\sqrt{2})^{1/2}} + \frac{1}{(\alpha\delta k/\sqrt{2})^{3/2}}\right)\exp(-\alpha\delta k/\sqrt{2}), \tag{12}$$

где $\alpha = 1/\sqrt{(S/24)(\delta^2\epsilon^{1/2}/\nu^{3/2}) + (1/6)(\delta/L)^2}$, δ – масштаб диссипации.

Из формулы (12) видно, что для достаточно мелкомасштабных флуктуаций отношение показателя экспоненты в спектре (12) к показателю экспоненты для асимптотики (2) оказывается порядка $(LV/S^2\nu)^{1/4} > 1$ (обычно $S \sim 0.5$ [3]), что указывает, во-первых, на принципиальную зависимость формы спектра от асимметрии, а во-вторых, – на более быстрое спадание спектра с ростом k и позволяет интерпретировать результаты численного эксперимента [1].

Таким образом, можно сделать вывод, что в диссипативной области форма спектра однородной стационарной ТБ со случайным источником определяется параметром асимметрии поля скорости.

---

1. S.S.Girimaji and Ye.Zhou, Phys. Lett. **A202**, 279 (1995).
2. P.G.Saffman, in: *Topics in non-linear physics*, *Lectures on homogeneous turbulence*, Ed. N.J.Zabusky, Springer, Berlin, 1968.
3. А.С.Монин, А.М.Яглом, *Статистическая гидромеханика*, т.2, Санкт-Петербург: Гидрометеоиздат, 1996.
4. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Теоретическая физика*, т.6, *Гидродинамика*, М.: Наука, 1986.
5. Е.А.Новиков, ЖЭТФ **47**, 1919 (1964).
6. G.A.Baker and P.Graves-Morris, *Pade approximants*, Addison-Wesley Publ. Comp., N.Y., 1981.
7. L.Sirovich, L.Smith, and V.Yakhot, Phys. Rev. Lett. **72**, 344 (1994).
8. J.D.Cole, *Perturbation methods in applied mathematics*, Blaisdell Publ. Comp., London, 1968.