Письма в ЖЭТФ, том 65, вып.10, стр.744 - 749 © 1997г. 25 мая

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ОХЛАЖДЕНИЯ АТОМОВ НИЖЕ ОДНОФОТОННОЙ ЭНЕРГИИ ОТДАЧИ ИМПУЛЬСНЫМ ПОЛЕМ

А.В.Тайченачев[1)], *А.М.Тумайкин, В.И.Юдин*

Новосибирский государственный университет

630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 24 апреля 1997 г.

Развивается полностью квантовое аналитическое описание охлаждения атомов с моментами $j_g = 1 \to j_e = 1$ импульсным $\sigma_+ - \sigma_-$ полем. Точно по эффектам отдачи решена задача об изменении распределения атомов по внутренним и поступательным степеням свободы под действием одного импульса поля. В аналитическом виде найдены рекуррентные формулы, позволяющие вычислять распределение после действия произвольной последовательности импульсов. Показано, что действие N импульсов поля приводит к образованию и сужению пиков в дискретных точках импульсного пространства, а также к уширению огибающей этих пиков. В случае широкого начального импульсного распределения получены явные формулы для пиков и огибающей и исследовано их асимптотическое поведение при $N \gg 1$.

PACS: 32.80.-t

1. Пионерские работы [1] положили начало интенсивному исследованию кинетических проявлений когерентного пленения населенностей (КПН). К настоящему времени теоретически разработаны [2] и частично реализованы экспериментально [1, 3] различные схемы лазерного охлаждения атомов ниже однофотонной энергии отдачи за счет селективного по скорости КПН в полях с пространственными градиентами поляризации и интенсивности. Недавно двумя группами была предложена новая схема импульсного (рамсеевского) охлаждения [4, 5], которая, как это видно из результатов эксперимента [5] и квантовых симуляций [4], позволяет получать более узкие структуры в распределении атомов по скоростям и за более короткое время, чем в случае непрерывного действия поля. В настоящей работе на примере перехода $j_g = 1 \to j_e = 1$ в импульсном $\sigma_+ - \sigma_-$ поле развивается полностью квантовое аналитическое описание эффекта рамсеевского охлаждения. Основное приближение, используемое нами, заключается в том, что время жизни атомов в темном состоянии, ограниченное эффектами поступательного движения, значительно превышает длительность светового импульса τ. В рамках теории возмущений это условие можно записать в виде неравенства $\gamma\tau\,(kv/\Omega)^2 \ll 1$ (γ – радиационная ширина возбужденного уровня, kv – доплеровский сдвиг, Ω – частота Раби) [1, 6], выполнение которого подразумевает использование либо предварительно охлажденных атомов, либо достаточно сильного лазерного поля. Кроме того, мы будем предполагать, что реализуется стационарный режим взаимодействия, то есть $\gamma\tau \gg 1$ и $\gamma S\tau \gg 1$, здесь $S = \Omega^2/(\gamma^2/4 + \delta^2)$ – параметр насыщения, а δ – отстройка от резонанса. В этих условиях матрица плотности атомов в координатном представлении после действия импульса поля имеет вид

$$\widehat{\rho}(z_1, z_2) = |\Psi_{NC}\rangle\, W(z_1, z_2)\, \langle\Psi_{NC}|\ , \tag{1}$$

[1)]e-mail: llf@admin.nsu.ru

где $|\Psi_{NC}\rangle$ – темное, то есть невзаимодействующее с полем, состояние, которое является когерентной суперпозицией волновых функций магнитных подуровней основного состояния (см. ниже (9)). Функция W зависит от начальной (до действия светового импульса) матрицы плотности и может быть найдена точно (вне рамок разложения по импульсу отдачи) методом, описанным нами в [6]. Эволюция матрицы плотности атомов, находящихся в основном состоянии, при свободном распространении определяется оператором кинетической энергии $\widehat{H}_K$. Решение задачи о вычислении соответствующего унитарного оператора $\exp\left(-i/\hbar \widehat{H}_K T\right)$ хорошо известно. Применяя в нужном порядке указанные выше преобразования, можно рассчитать атомное распределение после действия произвольной последовательности импульсов поля. В данной работе эта задача решена для $j_g = 1$. В аналитическом виде найдены рекуррентные формулы, связывающие распределение после действия $N+1$-импульса $W^{(N+1)}$ с $W^{(N)}$-распределением после N импульсов. Показано, что действие последовательности импульсов приводит к образованию и сужению пиков в дискретных точках импульсного пространства, а также к уширению огибающей этих пиков. В практически важном случае широкого (по сравнению с импульсом фотона) начального импульсного распределения получены явные формулы для пиков и огибающей, и рассмотрено их асимптотическое поведение при $N \gg 1$. Найдено, что ширина пиков убывает как $1/\sqrt{N}$, а ширина огибающей растет как $N^{1/4}$.

2. Рассмотрим одномерное (вдоль оси z) движение атомов, основное и возбужденное состояния которых образуют оптический переход $j_g = 1 \to j_e = 1$ при резонансном взаимодействии с импульсным $\sigma_+ - \sigma_-$ полем. Поле в интервале действия τ будем считать монохроматическим:

$$\mathrm{E}(z,t) = \mathrm{e}(z) E_0 \exp(-i\omega t) + \text{c.c.}\ ; \tag{2}$$

$\mathrm{e}(z) = (\mathrm{e}_{-1}\exp(ikz) - \mathrm{e}_{+1}\exp(-ikz))/\sqrt{2}$, где $\mathrm{e}_{\pm 1} = \mp(\mathrm{e}_x \pm i\mathrm{e}_y)/\sqrt{2}$ – единичные циклические векторы. В каждой точке пространства поле (2) является линейно поляризованным. Направление вектора поляризации $\mathrm{e}(z)$ в точке $z = 0$ совпадает с осью x, а при произвольном z повернуто на угол kz. В связи с этим удобно (как показано в [6]) перейти от лабораторной к локальной системе координат (СК), в которой ось x' вращается вместе с $\mathrm{e}(z)$. В частности, гамильтониан свободного атома во вращающейся СК запишется следующим образом: $\widehat{H}_0 = \widehat{H}_K + \hbar\omega_0 \widehat{\Pi}_e$, где

$$\widehat{H}_K = \frac{\left(\widehat{p} - \hbar k \widehat{J}_z\right)^2}{2M} \tag{3}$$

– оператор кинетической энергии, который теперь зависит от оператора проекции момента $\widehat{J}_z$, ω_0 – частота перехода, а

$$\widehat{\Pi}_e = \sum_{\mu_e=-j_e}^{j_e} |j_e, \mu_e\rangle \langle j_e, \mu_e| \tag{4}$$

– оператор, проектирующий на возбужденное состояние, $|j_e, \mu_e\rangle$ – волновые функции вырожденных магнитных подуровней. Гамильтониан резонансного взаимодействия атомов с полем (2) в локальной СК является пространственно однородным:

$$\widehat{H}_{A-F} = \hbar\Omega\widehat{V}\exp(-i\omega t) + \text{h.c.}\,, \tag{5}$$

где Ω – частота Раби (которую без ограничения общности будем считать положительной), а безразмерный оператор $\widehat{V}$ определен через коэффициенты Клебша–Гордана (ось квантования направлена вдоль оси z): $\widehat{V} = (\widehat{V}_{-1} - \widehat{V}_{+1})/\sqrt{2}$, где

$$\widehat{V}_q = \sum_{\mu_e,\mu_g} |j_e,\mu_e\rangle\,\langle j_e(j_g,1),\,\mu_e|j_g,\,\mu_g;\,1,\,q\rangle\,\langle j_g,\mu_g|\;. \tag{6}$$

Выделяя, обычным образом, быструю зависимость от времени на частоте поля, получим квантовое кинетическое уравнение, описывающее эволюцию медленных компонент матрицы плотности во вращающейся СК:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\rho}(z_1,z_2) \;&=\; -\frac{i}{\hbar}\left[\widehat{H}_K,\widehat{\rho}(z_1,z_2)\right] - i\Omega\left[(\widehat{V}+\widehat{V}^{\dagger}),\widehat{\rho}(z_1,z_2)\right] - \\
&-\;\left((\gamma/2 - i\delta)\widehat{\Pi}_e\widehat{\rho}(z_1,z_2) + (\gamma/2 + i\delta)\widehat{\rho}(z_1,z_2)\widehat{\Pi}_e\right) + \\
&+\;\gamma\sum_{q=\pm1,0} Q_q\left(k(z_1-z_2)\right)\widehat{V}_q^{\dagger}\widehat{\rho}(z_1,z_2)\widehat{V}_q\,,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\delta = \omega - \omega_0$ – отстройка от резонанса, а функции $Q_q(k(z_1 - z_2))$ описывают индуцированный и спонтанный эффекты отдачи:

$$\begin{aligned}
Q_{\pm1}(kz) \;&=\; \frac{3}{2}\left(\frac{\sin(kz)}{kz} + \frac{\cos(kz)}{(kz)^2} - \frac{\sin(kz)}{(kz)^3}\right)\exp(\mp ikz)\;; \\
Q_0(kz) \;&=\; 3\left(-\frac{\cos(kz)}{(kz)^2} + \frac{\sin(kz)}{(kz)^3}\right)\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Уравнение (7) точно учитывает квантовые эффекты, обусловленные как передачей импульса от поля атомам в радиационных процессах, так и поступательным движением атомов.

3. Если время жизни атомов в темном состоянии значительно превышает длительность импульса $\gamma\tau\,(kv/\Omega)^2 \ll 1$, то при решении задачи об изменении атомного распределения под действием светового импульса можно опустить первый член в правой части (7). В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка $\partial\rho/\partial t = \mathcal{L}\rho$, стационарное решение которой имеет вид (1). Темное состояние $|\Psi_{NC}\rangle$ обращает в нуль оператор взаимодействия с полем $\widehat{H}_{A-F}\,|\Psi_{NC}\rangle = 0$ и является суперпозицией зеемановских волновых функций основного состояния:

$$|\Psi_{NC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|j_g,-1\rangle - |j_g,1\rangle\right)\,. \tag{9}$$

Функция $W(z_1,z_2)$ имеет смысл двухточечной функции распределения в локальной СК, которая определяется передачей импульса в процессах спонтанного и индуцированного рассеяния фотонов во время действия поля, а также начальным (до действия светового импульса) распределением по внутренним и поступательным степеням свободы. Согласно [6], функцию W после действия импульса поля можно записать в виде

$$W(z_1,z_2|t+\tau) = \mathrm{Tr}\left\{\widehat{C}(z_1-z_2)\widehat{\rho}(z_1,z_2|t)\right\}\,, \tag{10}$$

где матрица $\widehat{C}(z_1 - z_2)$ является левым собственным вектором лиувиллиана $\mathcal{L}$, отвечающим нулевому собственному значению ($C\mathcal{L} = 0$), и удовлетворяет условию нормировки: $\langle\Psi_{NC}|\widehat{C}(z)|\Psi_{NC}\rangle = 1$. Явный вид матрицы $\widehat{C}$ для перехода $j_g = 1 \to j_e = 1$ был нами найден ранее [6] (формула (37)) и здесь для краткости воспроизводиться не будет.

4. После выключения поля атомы находятся в основном состоянии, поэтому их эволюция при свободном распространении определяется оператором кинетической энергии (3):

$$\widehat{\rho}(z_1, z_2|t+T) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_K T\right)|\Psi_{NC}\rangle\, W(z_1, z_2|t)\,\langle\Psi_{NC}|\exp\left(\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_K T\right). \qquad (11)$$

Комбинируя (11) и (10), можно вывести рекуррентную формулу, связывающую распределение после действия $N+1$-импульса $W^{(N+1)}$ с $W^{(N)}$-распределением после N импульсов:

$$W^{(N+1)}(z) =$$
$$= W^{(N)}(z) + S(kz)\left(W^{(N)}(z + 4\omega_r T/k) + W^{(N)}(z - 4\omega_r T/k) - 2W^{(N)}(z)\right),$$

$$S(kz) = \frac{2 - Q_{-1}(kz) - Q_1(kz)}{8 - 2Q_{-1}(kz) - 2Q_1(kz)}, \qquad (12)$$

где $z = z_1 - z_2$, зависимость от $z_1 + z_2$ опущена (в данной работе рассматривается пространственно однородный случай). Начальные условия для рекуррентии (12) определим следующим образом. Пусть до действия первого импульса атомы находятся в основном состоянии и имеют изотропное распределение по магнитным подуровням: $\rho^{(0)}_{\mu_g,\nu_g}(z) = \delta_{\mu_g,\nu_g} F^{(0)}(z)/3$, где $F^{(0)}(z)$ – начальное распределение в лабораторной СК. После действия первого импульса получим:

$$W^{(1)}(z) = \frac{2Q_0(kz) + 4\cos(kz)}{4 - Q_{-1}(kz) - Q_1(kz)}\frac{F^{(0)}(z)}{3}. \qquad (13)$$

Полученные формулы решают поставленную задачу. Рассмотрим теперь предельные случаи.

5. Естественным масштабом длины в (12), (13) является длина волны света $\lambda = 2\pi/k$. Если разброс по импульсам в начальном распределении значительно превышает импульс фотона, то функция $F^{(0)}(z)$ отлична от нуля в малой (по сравнению с λ) окрестности $z = 0$. Функция распределения после действия N импульсов в том же приближении представляет собой регулярную систему пиков, расположенных в точках 0, $\pm 4\omega_r T/k$, $\pm 8\omega_r T/k \ldots$:

$$W^{(N)}(z) = \sum_l \phi_l^{(N)}\mathcal{E}^{(N)}(z - 4\omega_r Tl/k), \qquad (14)$$

где функции $\mathcal{E}^{(N)}(0) = 1$, отличны от нуля в малой окрестности $z = 0$ и описывают изменение огибающей на каждом шаге. Амплитуды пиков $\phi_l^{(N)}$ удовлетворяют рекуррентной формуле:

$$\phi_l^{(N+1)} = \phi_l^{(N)} + S(4\omega_r Tl)\left(\phi_{l-1}^{(N)} + \phi_{l+1}^{(N)} - 2\phi_l^{(N)}\right) \qquad (15)$$

с начальным условием $\phi_l^{(1)} = \delta_{l,0}$;. $\mathcal{E}^{(N)}$ можно представить в виде конечного произведения:

$$\mathcal{E}^{(N)}(z) = \prod_{i=1}^{N} \left(1 - (kz)^2 D^{(i)}\right) F^{(0)}(z)\,, \tag{16}$$

где коэффициент "диффузии" $D^{(1)} = 11/30$; $D^{(N>1)} = 7(1 - \phi_1^{(N)})/10$ зависит от амплитуды.

Импульсное распределение (преобразование Фурье по разности z), соответствующее (14), имеет вид произведения $\widetilde{W}^{(N)}(p) = \Phi^{(N)}(p)\widetilde{\mathcal{E}}^{(N)}(p)$ периодической (с периодом $2\pi\hbar k/4\omega_r T$) и симметричной (относительно $p=0$) функции

$$\Phi^{(N)}(p) = 1 + 2\sum_{l=1}^{N-1} \cos(4\omega_r Tlp/(\hbar k))\phi_l^{(N)} \tag{17}$$

на плавную огибающую $\widetilde{\mathcal{E}}^{(N)}(p)$.

Внутри интервала периодичности $[-\pi\hbar k/(4\omega_r T), \pi\hbar k/(4\omega_r T)]$ функция (17) описывает формирование максимума в точке, где все гармоники интерферируют конструктивно, усиливая друг друга. Как видно из (15), коэффициенты $\phi_l^{(N)}$ вещественны, симметричны ($\phi_l^{(N)} = \phi_{-l}^{(N)}$) и положительны. Следовательно, максимум расположен в точке $p=0$. С ростом числа импульсов N увеличиваются число гармоник в (17) и их амплитуды. Очевидно, это приводит к росту максимума функции $\Phi^{(N)}(p)$ и уменьшению его ширины.

Наблюдаемая функция распределения в лабораторной СК выражается через $\widetilde{W}^{(N)}(p)$ согласно формуле $\widetilde{F}^{(N)}(p) = (\widetilde{W}^{(N)}(p+\hbar k) + \widetilde{W}^{(N)}(p-\hbar k))/2$, которая описывает расщепление каждого пика в локальном базисе на два пика в лабораторном.

6. Формулы (15) и (16) позволяют проанализировать асимтотическое поведение решения при большом числе импульсов. Для $N \gg 1$ зависимость коэффициентов $\phi_l^{(N)}$ от N и l можно аппроксимировать гладкой функцией $\phi(N,l)$, а уравнения (15) дифференциальным уравнением второго порядка $\partial\,\phi(N,l)/\partial\,N = a\,\partial^2\,\phi(N,l)/\partial\,l^2$ с граничным, $\phi(N,0)=1$, и начальным, $\phi(0,l)=0$, условиями. Здесь мы пренебрегли зависимостью коэффициента a от l, что справедливо при $4\omega_r T \gg 1$. Таким образом, задача сводится к уравнению теплопроводности для полуограниченного стержня, на конце которого поддерживается постоянная температура. Решение этой задачи имеет вид $\phi(N,l) = 1 - \mathrm{Erf}(l/(2\sqrt{aN}))$, где коэффицент "теплопроводности" $a = 1/4$. Отсюда видно, что ширина пиков в импульсном распределении убывает как $1/\sqrt{N}$. Коэффициент "диффузии" $D^{(N)}$ в уравнении (16) для огибающей пиков также имеет асимптоту $1/\sqrt{N}$. Следовательно, ширина огибающей растет как $N^{1/4}$, а относительная доля атомов в одном пике (площадь пика) убывает как $N^{-1/4}$.

Интересно отметить, что аналогичные асимптоты дли ширины и площади пиков получаются в задаче об охлаждении за счет селективного по скорости КПН в стационарном $\sigma_+ - \sigma_-$ поле [7], если под N понимать время взаимодействия с полем.

7. В данной работе, предполагая, что во время действия светового импульса поступательным движением атомов можно полностью пренебречь, мы развили сравнительно простое аналитическое описание рамсеевского охлаждения атомов. В рамках представленного метода точно учитываются квантовые эффекты, обусловленные отдачей при поглощении (излучении) фотонов и свободным

движением атомов в отсутствие поля. Показано, что взаимодействие атомов со световыми импульсами в условиях КПН позволяет создавать корреляции между произвольно удаленными точками z_1 и z_2, что имеет фундаментальное значение для атомной оптики и атомной интерферометрии.

---

1. A.Aspect, E.Arimondo, R.Kaiser et al., Phys. Rev. Lett. **61**, 826 (1988); A.Aspect, E.Arimondo, R.Kaiser et al., J. Opt. Soc. Amer. B**6**, 2112 (1989).
2. M.A.Ol'shanii, J. Phys. B**24**, L583 (1991); F.Mauri and E.Arimondo, Europhys. Lett. **16**, 717 (1994); C.Foot, H.Wu, E.Arimondo, and G.Morigi, J. Phys. II France **4**, 1913 (1994); P.Marte, R.Dum, R.Taïeb et al., Phys. Rev. A**49**, 4826 (1994).
3. J.Lawall, F.Bardou, B.Saubamea et al., Phys. Rev. Lett. **73**, 1915 (1994); H.Stecher, H.Ritsch, P.Zoller et al., Phys. Rev. A**55**, (1997).
4. H.Wu, E.Arimondo, and C.Foot, Quant. Semiclass. Opt. **8**, 983 (1996).
5. F.Sander, T.Devolder, T.Esslinger, and T.Hänsch, e-preprint physics/9611015 in xxx.lanl.gov.
6. A.V.Taichenachev, A.M.Tumaikin, and V.I.Yudin, Laser Phys. **2**, 575 (1992).
7. F.Bardou, J.P.Bouchard, O.Emile et al., Phys. Rev. Lett. **72**, 203 (1994).