

**П И С Ь М А**  
**В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ**  
**И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ  
 ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД

ТОМ 65, ВЫПУСК 11  
 10 ИЮНЯ, 1997

Письма в ЖЭТФ, том 65, вып.11, стр.801 - 806

© 1997г. 10 июня

**ХАОТИЧЕСКИЕ ВАКУУМНЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ РАБИ В  
 РЕЗОНАТОРНОЙ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

*Л.Е.Коньков, С.В.Пранц<sup>1)</sup>*

*Тихоокеанский океанологический институт  
 Дальневосточного отделения РАН  
 690041 Владивосток, Россия*

Поступила в редакцию 3 апреля 1997 г.

В численных экспериментах с двухуровневыми атомами, движущимися сквозь одномодовый высокодобротный резонатор, показано, что в режиме сильной атомно-полевой связи возникает новый тип спонтанного излучения – хаотические вакуумные осцилляции Раби.

PACS: 05.45.+b, 42.50.-p

В 1946 г. Парселл [1] обратил внимание на то, что скорость спонтанного излучения двухуровневой квантовой системы, помещенной в резонатор, настроенный на частоту квантового перехода  $\omega_c$ , увеличивается в  $6Qc^3\pi/V\omega_c^3$  раз по сравнению со скоростью спонтанного излучения в свободном пространстве. Если добротность резонатора  $Q = \omega_c/\Delta\omega_c$  достаточно велика,  $\Omega_0/\Delta\omega_c > 1$ , то спонтанное излучение становится обратимым, то есть система обменивается возбуждением с созданным ею полем со скоростью  $\Omega_0$ , равной вакуумной частоте Раби. Вакуумные осцилляции Раби были обнаружены как на ридберговских переходах атомов в микроволновых резонаторах [2], так и на оптических переходах в микрорезонаторах [3]. В этом эффекте проявляется одно из наиболее фундаментальных взаимодействий в природе – динамическое взаимодействие вещества с вакуумом. Управление спонтанным излучением (его скоростью, спектральным составом и пространственной структурой) открывает широкие перспективы в технологии изготовления новых высокоэффективных излучателей в микроэлектронике, использующих микрорезонаторы и материалы с фотонной запрещенной зоной (photonic bandgap materials) [4].

<sup>1)</sup>e-mail: prants@medphys.marine.su

В настоящей работе мы с помощью численных экспериментов показываем, что при определенных условиях возникает совершенно новый тип спонтанного излучения атомов в высокодобротных резонаторах малого объема – хаотические вакуумные осцилляции Раби. Подчеркнем, что численно обнаруженный хаос во взаимодействии возбужденных атомов с вакуумом является динамическим (детерминированным), то есть он возникает в результате экспоненциальной неустойчивости чисто динамической атомно-полевой системы в полости, которая поддерживает лишь одну моду электромагнитного поля, а не является следствием абсолютного хаоса самого физического вакуума. В принципе, хаотические вакуумные осцилляции Раби возможны в любой области спектра, однако с практической точки зрения наиболее перспективными представляются эксперименты с ридберговскими атомами в микроволновых резонаторах и с обычными атомами в оптических микрорезонаторах.

В современных микроазерных экспериментах ридберговские атомы, приготовленные в квантовом состоянии с большим главным квантовым числом, запускаются в высокодобротный ( $Q \simeq 10^{10}$ ) одномодовый микроволновый резонатор ( $\omega_f \simeq 10^{11}$  рад/с), находящийся при очень низкой температуре ( $T \leq 1$  К). При таких условиях время жизни фотонов в резонаторе  $T_f \simeq 10^{-1} \div 10^{-2}$  с и время жизни циркулярных ридберговских состояний  $T_a \simeq 10^{-2}$  с на несколько порядков величины больше периода вакуумных осцилляций Раби  $T_0 = 2\pi/\Omega_0 < 10^{-4}$  с и времени пролета атомов сквозь резонатор  $T_{int} < 10^{-5}$  с. В режиме сильной связи атомов с полем,  $T_{int}, T_0 \ll T_a, T_f$ , атомы успевают много раз обменяться возбуждением с созданным ими самими полем прежде, чем покинут резонатор. В этом пределе динамика атомно-полевой системы существенно гамильтонова и может быть описана нерелятивистским гамильтонианом в приближении вращающейся волны

$$H = \hbar\omega_a R_0 + \hbar\omega_f (a^\dagger a + 1/2) + \hbar\Omega_0(x)(a^\dagger R_- + a R_+). \quad (1)$$

Коллективные атомные операторы

$$R_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_z^j, \quad R_\pm = \sum_{j=1}^N \sigma_\pm^j \quad (2)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[R_0, R_\pm] = \pm R_\pm, \quad [R_+, R_-] = 2R_0. \quad (3)$$

Сила взаимодействия атомного диполя с вакуумным полем в резонаторе характеризуется вакуумной частотой Раби, величина которой зависит от местоположения атома  $x$ :

$$\Omega_0(x) = |dE(x)|/\hbar. \quad (4)$$

Здесь  $d$  – матричный элемент дипольного момента перехода между рабочими ридберговскими уровнями, а

$$E(x) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_f}{V}} f(x) \quad (5)$$

– электрическое вакуумное поле в точке  $x$ . Функция  $f(x)$  характеризует пространственную структуру выделенной моды по оси  $x$ , вдоль которой движутся

атомы, удовлетворяет на стенках резонатора граничным условиям, нормализована на единицу в максимумах поля и в простейшем случае имеет вид

$$f(x) = \sin kx = \sin \frac{2\pi gt}{L}, \quad (6)$$

где  $L$  – размер резонатора вдоль оси  $x$ ,  $g$  – постоянная скорость движения атомов. В микроволновом диапазоне энергия отдачи атомов при испускании фотонов очень мала:  $R = (\hbar\omega_f)^2/2mc^2 \simeq 10^{-18}$  эВ, что позволяет пренебречь изменением кинетической энергии атомов и рассматривать эволюцию только их "внутренних" состояний (приближение Рамана – Ната). Предполагается, что размер атомного сгустка, состоящего из  $N$  атомов, много меньше длины волны микроволнового излучения ( $\simeq 1$  см). Это позволяет считать величину  $\Omega_0(x)$  одинаковой для всех атомов.

Динамика атомно-полевой системы описывается уравнениями Гейзенберга для атомных и полевых операторов, которые обычно усредняют по некоторому квантовому состоянию, факторизуя все корреляторы второго порядка и выше в произведениях корреляторов первого порядка (полуклассическое приближение). Для покоящихся атомов хаос в полуклассическом приближении возможен только при отказе от приближения вращающейся волны [5]. В недавней работе [6] показано, что в пучке движущихся атомов полуклассический динамический хаос возникает даже в приближении вращающейся волны. Однако в любом случае процедура расщепления *всех квантовых корреляторов* приводит к потере источников спонтанного излучения. В результате в соответствующих моделях вообще не возникает осцилляций из начального состояния с возбужденными атомами и вакуумным полем. Спонтанное излучение можно включить в теорию, учитывая при расщеплении квантовые корреляции в атомной подсистеме [7].

Из уравнений Гейзенберга для следующей совокупности операторов  $a^\dagger a$ ,  $R_+ R_-$ ,  $R_0$ ,  $a R_+ + a^\dagger R_-$ ,  $i(a^\dagger R_- - a R_+)$  получим искомую систему уравнений для средних значений с учетом межатомных квантовых корреляций:

$$\begin{aligned} \dot{n} &= -2\Omega\sqrt{N}fv, \\ \dot{u} &= -(\omega - 1)u - 2\Omega f(1 + 2r + z + 2Nnz)N^{-1/2}, \\ \dot{v} &= (\omega - 1)v, \\ \dot{z} &= 4\Omega\sqrt{N}fv, \\ \dot{r} &= -2\Omega N\sqrt{N}fzv, \\ \dot{f} &= -(b\omega)^2 f, \end{aligned} \quad (7)$$

в которой точки означают дифференцирование по безразмерному времени  $\tau = \omega_a t$ , а переменные имеют следующий смысл:

$$\begin{aligned} n &= N^{-1} \langle a^\dagger a \rangle, \quad u = N^{-3/2} \langle a R_+ + a^\dagger R_- \rangle, \quad r = N^{-1} \langle \sum_{i \neq j=1}^N \sigma_+^i \sigma_-^j \rangle, \\ z &= 2N^{-1} \langle R_0 \rangle, \quad v = iN^{-3/2} \langle a^\dagger R_- - a R_+ \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение для модовой функции  $f$  включено в систему (7), чтобы сделать ее автономной.

Наша модель включает четыре безразмерных управляющих параметра: коллективную вакуумную частоту Раби  $\Omega \equiv \Omega_0/2\omega_a$ , частотную расстройку  $\omega \equiv \omega_f/\omega_a$ , отношение скорости атомов к скорости света в вакууме  $b \equiv g/c$  и

число атомов в пучке  $N$ . Полученная динамическая система нелинейна, а ее решение при начальном условии

$$n(0) = u(0) = v(0) = r(0) = 0, \quad z(0) = 1, \quad (9)$$

описывает вакуумные осцилляции Раби. Помимо тривиального интеграла движения, связанного с модовой функцией  $f$ , она имеет еще два закона сохранения

$$Nz^2 + 4r = C_1, \quad z + 2n = C_2. \quad (10)$$

В случае точного резонанса,  $\omega = 1$ , из третьего уравнения системы (7) следует дополнительный интеграл движения  $u = \text{const}$ , характеризующий скорость обмена энергией между атомной и полевой подсистемами. Нарушение именно этого закона сохранения при  $\omega \neq 1$  приводит к неинтегрируемости (7). Заметим, что для покоящихся атомов аналогичный закон сохранения справедлив и в отсутствие резонанса, что является следствием приближения вращающейся волны [8].

Численный анализ динамической атомно-полевой системы (7) показал, что она экспоненциально неустойчива в отсутствие резонанса. Экспоненциальная неустойчивость характеризуется, как известно, положительным значением одного из показателей Ляпунова. Мы вычисляли максимальный показатель Ляпунова  $\lambda$  в широком диапазоне значений управляющих параметров  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $b$  и  $N$ . Наглядную картину динамического хаоса дают так называемые топографические  $\lambda$ -карты, на которых на плоскости изображаются значения  $\lambda$  в зависимости от значений двух управляющих параметров [9].

Необходимым условием возникновения и развития хаотических вакуумных осцилляций Раби является соблюдение следующей иерархии характерных времен:

$$T_R \ll T_{cr} \leq T_{int} \ll T_a, T_f, \quad (11)$$

где  $T_R = 2\pi/\Omega_0\sqrt{N}$  – период коллективных вакуумных осцилляций,  $T_{cr} = 1/\lambda\nu_a$  – время расщепления корреляций,  $T_{int} = L/g$  – время пролета атомов сквозь резонатор. Оценим величину максимального значения  $\Omega_0$  вакуумной частоты Раби  $\Omega_0(x)$  для ридберговских атомов с частотой рабочего перехода  $\nu_a = 5 \cdot 10^{10}$  Гц и величиной дипольного момента  $d = 10^{-15}$  СГС в микрорезонаторе объемом  $V = LR^2$ , поперечным размером  $R = 10^{-3}$  см и длиной по оси  $x$ , вдоль которой движутся атомы,  $L = 1$  см. Из (4) и (5) получим  $\Omega_0 \simeq 3 \cdot 10^7$  рад/с. Численные эксперименты показывают, что при таких значениях параметров заметный хаос с  $\lambda = 6 \cdot 10^{-3}$  наступает уже для  $N = 10^6$  атомов, летящих в пучке со скоростью  $v = 3 \cdot 10^8$  см/с ( $b = 10^{-2}$ ). Оценки дают  $T_R \simeq 0.2$  нс,  $T_{int} \simeq 3.3$  нс,  $T_c \simeq 3.3$  нс, и, следовательно, условия (11) выполняются.

На рис.1 приведена топографическая  $\lambda$ -карта на плоскости  $\omega - \lg \Omega$  для  $N = 10^6$  и  $b = 10^{-2}$ , подтверждающая отсутствие хаоса ( $\lambda = 0$ ) при точном резонансе ( $\omega = 1$ ). Сила хаоса характеризуется величиной  $\lambda$ , шкала значений которого приведена на рисунке справа. Топографическая  $\lambda$ -карта на плоскости  $\lg b - \lg N$  дает наглядное представление о силе хаоса в различных диапазонах значений скорости атомов и их числа. На рис.2 она показана для  $\omega = 0.9$  и  $\Omega = 10^{-3}$ .

Максимальный показатель Ляпунова является прекрасным диагностическим средством, однако его нельзя измерить непосредственно в реальном эксперименте. Динамику числа квантов  $Nn(t)$  и величины атомной инверсии  $Nz(t)$

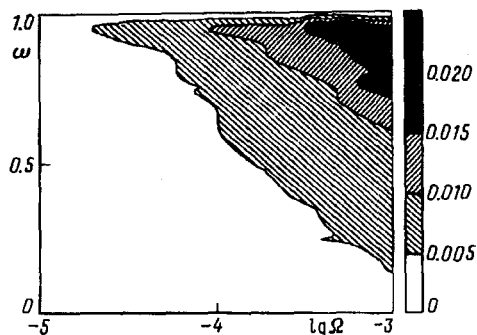


Рис.1. Топографическая  $\lambda$ -карта атомно-полевой системы в плоскости  $\omega - \lg \Omega$  для  $N = 10^6$ ,  $b = 0.01$

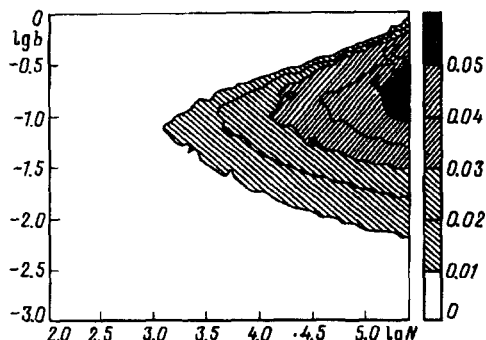


Рис.2. Топографическая  $\lambda$ -карта атомно-полевой системы в плоскости  $\lg b - \lg N$  для  $\omega = 0.9$ ,  $\Omega = 0.001$

трудно наблюдать в экспериментах с движущимися атомами. Физической величиной, измеряемой в таких экспериментах, является интенсивность спонтанного излучения  $N$  атомов:  $I(t) = I_0 \langle R_+ R_- \rangle$ , где  $I_0$  - интенсивность спонтанного излучения одного атома. Выделяя в квантовом корреляторе  $\langle R_+ R_- \rangle$  член, ответственный за межатомные корреляции, получим  $I(t) = I_0 N (r + z/2 + 1/2)$ . Первое слагаемое описывает коллективное спонтанное излучение, обусловленное корреляцией отдельных атомов [7]. Сумма второго и третьего слагаемых характеризует вклад изотропного спонтанного излучения. С помощью  $\lambda$ -карт (рис.1 и 2) нетрудно найти комбинации значений управляющих параметров  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $b$ ,  $N$ , для которых интенсивность спонтанного излучения  $I(t)$  осциллирует хаотически. В качестве иллюстрации на рис.3 приведен типичный спектр мощности этой величины в логарифмическом масштабе в случае хаотического процесса с  $\lambda = 0.05$  для  $\omega = 0.9$ ,  $\Omega = 10^{-3}$ ,  $b = 0.22$ ,  $N = 10^5$ . Вычисленные, но не показанные здесь, спектры мощности для регулярных вакуумных осцилляций Раби ( $\lambda \simeq 0$ ) имеют характерную для квазипериодического процесса структуру с отдельными хорошо разрешенными пиками.

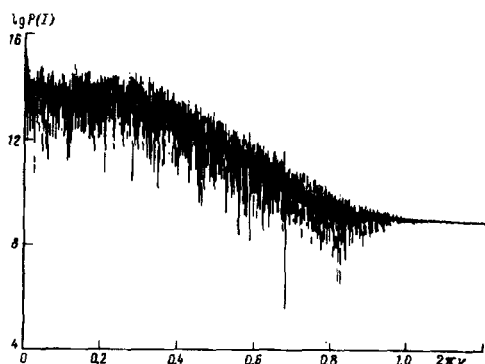


Рис.3. Спектр мощности хаотических вакуумных осцилляций Раби с максимальным показателем Ляпунова  $\lambda = 0.05$  для  $\omega = 0.9$ ,  $\Omega = 10^{-3}$ ,  $b = 0.22$ ,  $N = 10^5$

В заключение подчеркнем, что наша модель атомно-полевой динамики (7), учитывающая межатомные корреляции, выходит за рамки простого полуклассического приближения [5,6,9], в котором пренебрегается всеми корреляциями

в атомно-полевой системе. Тем не менее, динамический хаос в ней оказывается возможным даже в приближении вращающейся волны. Проведенные численные эксперименты и оценки показывают, что при движении атомов в вакуумном поле высокочастотного микрорезонатора для физически разумных значений параметров атомно-полевая система претерпевает переход к новому типу спонтанного излучения — хаотическим вакуумным осцилляциям Раби.

Экспериментальная реализация режима хаотических вакуумных осцилляций Раби требует сочетания высокой скорости движения атомов с малым объемом резонатора (или достаточно большой плотностью атомов). В известных нам микроазерных экспериментах скорости атомов не превышают  $10^6$  см/с ( $b \leq 10^{-5}$ ), а поперечные размеры резонатора не превышают 1 мм [2,4]. При таких значениях  $b$  и  $R$  величина максимального показателя Ляпунова в наших расчетах не превосходит ошибки вычислений, то есть вакуумные осцилляции Раби являются существенно (квази)периодическими. Для выделения динамического хаоса на фоне неизбежных в реальном эксперименте случайных процессов полезными могут оказаться эксперименты с резонансными атомами. Как показывают наши аналитические и численные результаты, при точном резонансе атомов с выделенной модой резонатора динамический хаос заведомо невозможен (по крайней мере в приближении вращающейся волны).

Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 96-02-19827 и 96-02-18746).

- 
1. E.M.Purcell, *Phys. Rev.* **69**, 681 (1946).
  2. Y.Kaluzny, P.Goy, M.Gross et al., *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1175 (1983).
  3. R.J.Tompson, G.Rempe, and H.J.Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1132 (1992).
  4. *Microcavities and Photonic Bandgaps: Physics and Applications*, Eds. J. Rarity and C. Weisbuch, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
  5. П.И.Белобров, Г.М.Заславский, Г.Х.Тартаковский, *ЖЭТФ*, **71**, 1799 (1976).
  6. S.V.Prants and L.E.Kon'kov, *Phys. Lett. A* **225**, 33 (1997).
  7. А.В.Андреев, В.И.Емельянов, Ю.А.Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, М.: Наука, 1988.
  8. E.T.Jaynes and F.W.Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
  9. С.В.Пранц, Л.Е.Коньков, *Изв. РАН, сер. физ.* **60**, 178 (1996).