Письма в ЖЭТФ, том 65, вып.11, стр.851 - 854

О КЛАССИЧЕСКОМ АНАЛОГЕ ИЗОСПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ШРЕДИНГЕРА

В.М.Елеонский[1], *В.Г.Королев*[2], *Н.Е.Кулагин*

Государственный научный центр
"НИИ физических проблем им. Ф.В.Лукина"
103460 Зеленоград, Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 апреля 1997 г.
После переработки 5 мая 1997 г.

Показано, что в классическом пределе изоспектральной задаче для уравнения Шредингера отвечает задача о деформациях потенциала, сохраняющих зависимость частоты колебаний от энергии. Решениями соответствующих эволюционных (по параметру деформации) уравнений для потенциала являются, в частности, простые волны Римана. Определена связь таких решений с решениями обратной задачи механики – задачи восстановления потенциала по заданной зависимости частоты колебаний от энергии.

PACS: 05.45.+b, 47.52.+j

Задача об изоспектральных деформациях потенциала уравнения Шредингера, определяемых соответствующими фазовыми потоками [1,2], может быть связана с определенным классом эволюционных (по параметру деформации) уравнений для собственных элементов задачи Шредингера и потенциала [3]. В простейшем случае точечного спектра изоспектральной задаче отвечают следующие уравнения:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}(\psi_E)_{xx} + U(x,\tau)\psi_E = E\psi_E, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\psi_E = 0; \tag{1}$$

$$E_\tau = 0, \quad \frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{(\psi_E)_x}{\psi_E}\right]_\tau = \frac{1}{2}\alpha(\tau)\psi_E^2, \quad U_\tau = \alpha(\psi_E^2)_x, \tag{2}$$

где τ – параметр деформации. Последнее из соотношений (2) определяет простейший (индивидуальный) фазовый поток, индуцированный выделенным собственным элементом задачи Шредингера (1); $\alpha(\tau) > 0$ – произвольная функция τ. Как показано в [3], для указанного частного случая уравнение, описывающее изоспектральную деформацию потенциала (и получаемое из уравнений (1), (2)), может быть приведено к форме известного уравнения Лиувилля $S_{xt} = \exp S$; ему подчиняется, в частности, и семейство потенциалов, соответствующих эквидистантному спектру энергий. При переходе к классическому пределу $\hbar \to 0$ некоторые представители этого семейства вырождаются в потенциалы, для которых классическое движение является изохронным (период не зависит от энергии) [4], в частности, в потенциал гармонического осциллятора.

В связи с этим возникает вопрос: что является классическим пределом (или аналогом) самой изоспектральной задачи квантовой механики?

[1]e-mail: eleon@nonlin.msk.ru
[2]korolev@nonlin.msk.ru

Хорошо известно, что в классическом пределе ($\hbar \to 0$, $\psi \to \sqrt{\rho} e^{iS/\hbar}$) уравнение Шредингера приводит к уравнениям Гамильтона – Якоби и неразрывности [5, 6]:

$$E = \frac{1}{2\mu}(S_x)^2 + U(x,\tau), \qquad (\rho S_x)_x = 0. \tag{3}$$

Следуя логике квантовой изоспектральной задачи [2,3], дополним эту пару уравнений выражением для классического аналога фазового потока

$$U_\tau = \alpha(\tau)\rho_x. \tag{4}$$

В фиксированном уровне энергии $E = E_0$ при условии, что $(E_0)_\tau = 0$, уравнения (3), (4) приводят к следующему эволюционному уравнению для функции $S(x,\tau,E_0)$:

$$\left[\frac{1}{2\mu}(S_x)^2\right]_\tau + \alpha(\tau)\beta(\tau)\left(\frac{1}{|S_x|}\right)_x = 0. \tag{5}$$

Здесь $\beta(\tau) > 0$ – произвольная функция, возникающая при интегрировании уравнения неразрывности; происхождение знака модуля в (5) связано с условием $\rho(x,\tau) > 0$. Переход к полю скоростей $V(x,\tau) = \mu^{-1}S_x$ и новому параметру деформации $\tau \to \tau = \mu^{-2}\int d\tau\, \alpha(\tau)\beta(\tau)$ приводит уравнение (5) к виду

$$V_\tau - |V|^{-3}V_x = 0, \tag{6}$$

при этом эволюционное уравнение для потенциала в силу уравнений (3)–(5) принимает вид

$$U_\tau - \left(\frac{\mu/2}{E_0 - U}\right)^{3/2} U_x = 0. \tag{7}$$

Решением этого уравнения (в неявной форме) является простая волна Римана [7]:

$$U(x,\tau) = U_0\left[x + \left(\frac{\mu/2}{E_0 - U}\right)^{3/2}\tau\right], \qquad U(x,\tau)|_{\tau=0} = U_0(x). \tag{8}$$

Здесь $U_0(x)$ – недеформированный потенциал.

Покажем, что решение (8) описывает деформацию классического потенциала U, сохраняющую при любом τ исходную зависимость периода колебаний от энергии $T(E)$. Введем функцию W_0, обратную к U_0: $y = U_0(x)$, $x = W_0(y)$. В общем случае функция W_0 имеет несколько ветвей $W_0^{(k)}$ даже в случае однозначно определенного потенциала U_0. Из (8) получаем, что зависимость $x(U,\tau)$ для каждой ветви определяется выражением

$$x^{(k)}(U,\tau) = W_0^{(k)}(U) - \left(\frac{\mu/2}{E_0 - U}\right)^{3/2}\tau. \tag{9}$$

Рассмотрим две соседние ветви $x^{(k')}$ и $x^{(k'')}$, образующие локальный минимум потенциала. Как известно [8], зависимость $T(E)$ для движения в такой яме подчиняется уравнению

$$x^{(k')}(U,\tau) - x^{(k'')}(U,\tau) = \int\limits_{U_{min}}^{U} \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{U - E}}. \tag{10}$$

В силу (9) левая часть этого соотношения не зависит от параметра деформации τ; следовательно, и зависимость $T(E)$ для потенциала $U(x,\tau)$ та же, что и для $U_0(x)$ (отметим, что точки поворота $x^{(k)} = W_0^{(k)}(E) - [2(E_0 - E)/\mu]^{-3/2}\tau$ движутся при деформации потенциала таким образом, что расстояние между ними не меняется).

Таким образом, условию независимости точечного спектра собственных значений энергии квантовой задачи от параметра деформации потенциала отвечает в классической задаче сохранение при деформации той зависимости частоты колебаний от энергии, которая присуща исходному (недеформированному) потенциалу [4].

Вернемся к решению (8). Как правило, эволюция по параметру деформации приводит к (характерной для простых волн Римана) потере однозначности потенциала. В рассмотренном выше случае индивидуального потока (4) многозначность деформируемого потенциала возникает сразу (при $\tau = 0+$), и указанные выше свойства частоты колебаний реализуются при конечных τ лишь для тех уровней энергии $E \leq E_{crit} < E_0$, для которых потенциал $U(x,\tau,E_0)$ является однозначной функцией x (рис.1).

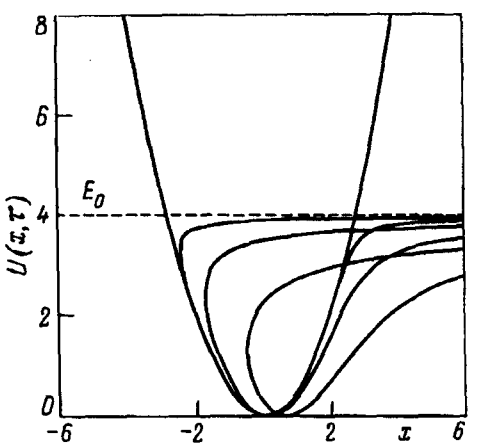

Рис.1. Деформация изохронного потенциала в однопотоковом случае, $E_0 = 4$, $\tau = 0, 0.1, 1, 5$

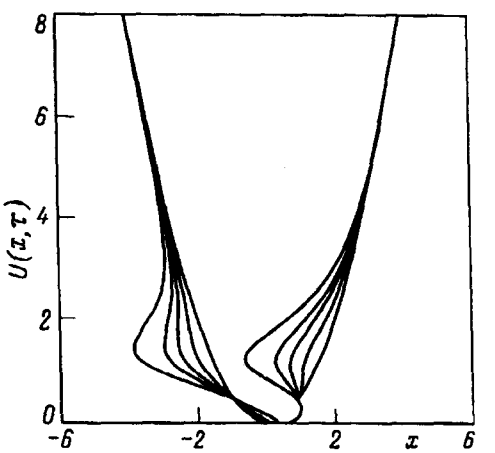

Рис.2. Деформация изохронного потенциала в двухпотоковом случае для $E_{1,2} = E_0 \pm i\epsilon$, $E_0 = \epsilon = 1$; $\tau = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.5$

При переходе к эволюционным уравнениям для потенциала, индуцированным набором фазовых потоков

$$U_\tau = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(\tau)(\rho_j)_x \tag{11}$$

в выделенных уровнях $E_1^0, E_2^0, \ldots, E_N^0$, система уравнений (3), записанная для уровней $E = E_j^0$, $1 \leq j \leq N$ приводит к уравнению для более общего класса простых волн:

$$U_\tau - \sum_{j=1}^{N} \frac{\gamma(\tau)}{(E_j^0 - U)^{3/2}} U_x = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим случай деформации потенциала гармонического осциллятора $U_0 = (\omega x)^2/2$. В случае $N = 2$ решение уравнения (12) имеет вид

$$x_\pm(U,\tau) = \pm\frac{\sqrt{2U}}{\omega} - \frac{\gamma_1\tau}{(E_1^0 - U)^{3/2}} - \frac{\gamma_2\tau}{(E_2^0 - U)^{3/2}}, \quad \gamma_{1,2} = \mathrm{const}. \tag{13}$$

Положим $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$ и для избежания сингулярности сместим параметры E_1^0, E_2^0 в комплексную плоскость ($E_1^0 \to E_0 + i\epsilon, E_2^0 \to E_0 - i\epsilon$). В результате находим, что при конечном значении ϵ деформированный потенциал является изохронным *при всех* $E < +\infty$ для значений параметра $0 \le \tau < \tau_{crit}(E_0, \epsilon)$. Критическое значение τ определяется согласно известным условиям опрокидывания простейших волн Римана. Характерный сценарий деформации потенциала гармонического осциллятора приведен на рис.2.

Таким образом, расширение набора фазовых потоков в (11) может приводить к удалению во времени точки опрокидывания потенциала. Отметим при этом, что во всех случаях потенциал после момента опрокидывания может доопределяться с сохранением однозначности с помощью стандартных условий, используемых при анализе опрокидывания нелинейных волн.

В заключение укажем на связь рассмотренных выше эволюционных уравнений для деформируемых потенциалов с обратной задачей классической механики – задачей восстановления потенциала по заданной зависимости частоты колебаний от энергии. В общем случае эта задача связана с решением уравнения (10) [8]. В случае изохронных потенциалов ($T(E) = \mathrm{const}(E)$) решение такой задачи определено соотношением

$$x_+(U) - x_-(U) = 2\frac{\sqrt{2U}}{\omega}. \tag{14}$$

Нетрудно показать, что это выражение допускает альтернативную запись

$$U = \frac{1}{2}\omega^2[x - X(U)]^2. \tag{15}$$

Здесь $X(U)$ – произвольная функция. Допустим, что X зависит от параметра τ: $X = X(U,\tau)$. Дифференцируя выражение (15) по x и τ, убеждаемся, что $U(x,\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$U_\tau + X_\tau(U,\tau)U_x = 0. \tag{16}$$

Эволюционные уравнения для деформируемых потенциалов (12), порожденные множеством потоков (11), могут быть отождествлены с уравнением (16). Таким образом, классический аналог квантовой изоспектральной задачи связан с обратной задачей классической механики.

---

1. E.A.Kuznetsov and S.E.Fal'kovich, Phys. Lett. **86A**, 203 (1981).
2. H. P.McKean and E.Trubowitz, Commun. Math. Phys. **82**, 471 (1982).
3. V.M.Eleonsky and V.G.Korolev, Phys. Rev. A **55**(4), 2580 (1997).
4. V.M.Eleonsky and V.G.Korolev, J. Phys. A **28**, 4973 (1995).
5. В.А.Фок, *Начала квантовой механики*, М.: Наука, 1976.
6. Д.И.Блохинцев, *Принципиальные вопросы квантовой механики*, М.: Наука, 1987.
7. Дж.Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, М.: Мир, 1977 (G.B.Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, New York: John Wiley, 1974).
8. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Механика*, М.: Наука, 1988.