

## ГЕНЕРАЦИЯ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ

Е.Н.Пелиновский<sup>+1)</sup>, А.В.Слуконяев\*

<sup>+</sup> Отдел нелинейных волн, Институт прикладной физики РАН  
603600 Нижний Новгород, Россия

\* Нижегородский государственный университет  
603600 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 19 марта 1998 г.

Представлены результаты численного моделирования процессов взаимодействия и генерации солитонов в нелинейных интегрируемых системах, допускающих существование солитона предельной амплитуды. В качестве такой интегрируемой системы рассмотрено уравнение Гарднера, частными случаями которого являются уравнение Кортевега – де Вриза (для квадратичной нелинейности) и модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза (для кубической нелинейности). Показано, что в процессе эволюции на гребне предельного солитона появляются солитоны противоположной полярности.

PACS: 02.30.Jr, 94.10.Jd

Открытое еще в 1895 г. для волн на воде уравнение Кортевега – де Вриза является наиболее популярной моделью для описания нелинейных волн в слабодиспергирующей среде, оно по существу стало первым полигоном для доказательства частицеподобных свойств нелинейного волнового поля в виде стабильных солитонов и интегрируемости эволюционной задачи с помощью метода обратной задачи теории рассеяния, позволившего доказать исключительную роль солитонов в асимптотическом представлении волнового поля на больших временах. Уравнение Кортевега – де Вриза получается в первом порядке теории возмущений по малой амплитуде волны и слабой высокочастотной дисперсии, поэтому оно применимо для описания разнообразных волновых движений в океане и атмосфере, плазме и астрофизике и в самом общем виде может быть представлено как

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (c + \alpha u) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

где  $c$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  – постоянные, определяемые спецификой физической задачи. В первом порядке теории возмущений получается модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (c + \alpha_1 u^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (2)$$

В частности, такое уравнение получено для электромагнитных поверхностных волн в электрическом поле [1], волн в размерно-квантовых пленках [2], внутренних волн в океане с определенной стратификацией [3] и некоторых других ситуациях. Модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза также точно решается методом обратной задачи теории рассеяния [4], и солитоны и кинки (ударные перепады) здесь также

<sup>1)</sup> e-mail: enpeli@appl.sci-nnov.ru

определяют асимптотическое представление волнового поля. Если квадратичная нелинейность отлична от нуля, то кубическая нелинейность получается в следующем порядке теории возмущений и может удерживаться в уравнении наряду со следующими поправками по дисперсии, включая и нелинейную дисперсию (см., например, [5]). Уравнения такого типа практически только начали сейчас изучаться [6]. Из общих соображений, однако, ясно, что в пределах теории возмущений эффекты, связанные с малыми поправками высших порядков, должны быть малы и не должны приводить к кардинальным изменениям в форме, например, солитонов. Между тем имеются ситуации, когда коэффициент при квадратичной нелинейности может быть достаточно малым, так что квадратичная и кубическая нелинейности оказываются одного порядка, и в то же время нет необходимости учитывать следующие порядки по дисперсии. Получаемое таким образом уравнение носит имя Гарднера:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (c + \alpha u + \alpha_1 u^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (3)$$

Целью настоящей статьи является демонстрация новых физических эффектов, связанных с генерацией и взаимодействием солитонов большой амплитуды, когда квадратичная и кубическая нелинейности оказываются одного порядка.

По-видимому, впервые уравнение Гарднера (3) было получено строго в рамках асимптотической теории для внутренних волн в двухслойной жидкости со скачком плотности на границе раздела [7, 8]. Соответствующие выражения для коэффициентов этого уравнения имеют вид (в приближении малости скачка плотности)

$$c = \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}}, \quad \beta = \frac{c h_1 h_2}{6}, \quad \alpha = \frac{3c}{2} \frac{h_1 - h_2}{h_1 h_2}, \quad \alpha_1 = -\frac{3c}{8h_1^2 h_2^2} (h_1^2 + h_2^2 + 6h_1 h_2), \quad (4)$$

где  $u$  – смещение границы раздела,  $h_1$  и  $h_2$  – толщины верхнего и нижнего слоев, соответственно,  $\Delta\rho/\rho$  – относительная величина скачка плотности и  $g$  – ускорение силы тяжести. Как видно из (4), коэффициент квадратичной нелинейности может менять знак (и это ведет к интересным особенностям трансформации солитона в случае наклонной границы, см. [9]), в то время как коэффициент кубической нелинейности отрицателен. Недавно формулы для коэффициентов уравнения (3) были обобщены для произвольной плотностной стратификации жидкости [10] и показано, что коэффициент кубической нелинейности может быть любого знака [3]. Если считать глубины слоев примерно равными между собой и амплитуду волны малой по сравнению с глубиной, то квадратичная и кубическая нелинейности могут рассматриваться малыми и сопоставимыми между собой ( $\alpha u/c \sim \alpha_1 u^2/c \ll 1$ ), а также с дисперсией. Поскольку при этом обе нелинейности оказываются членами одного порядка (в традиционных схемах возмущений кубическая нелинейность всегда меньше квадратичной), то в этом смысле можно говорить о волнах большой амплитуды (отметим, что в “житейском” смысле такие волны в океане могут достигать больших амплитуд в десятки метров). Здесь мы рассмотрим случай, когда коэффициент кубической нелинейности отрицателен, как для двухслойной жидкости.

Односолитонное решение уравнения Гарднера легко находится в явном виде:

$$u(x, t) = \frac{6\beta\Gamma^2}{\alpha} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{6\alpha_1\beta\Gamma^2}{\alpha^2} \cosh(\Gamma(x - Vt))}}, \quad V = c + \beta\Gamma^2, \quad (5)$$

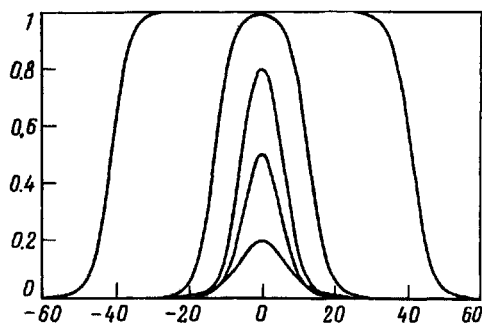


Рис.1. Форма солитона при различных амплитудах

где  $\Gamma^{-1}$  – эффективная ширина солитона. При малых  $\Gamma$  решение (5) описывает солитон Кортевега – де Вриза с амплитудой  $A = 3\beta\Gamma^2/\alpha$  (его полярность определяется знаком коэффициента квадратичной нелинейности), а при  $\Gamma \rightarrow \alpha/(6|\alpha_1|\beta)^{1/2}$  солитон приобретает прямоугольную форму (рис. 1) с предельной амплитудой

$$A_{lim} = \alpha/|\alpha_1|. \quad (6)$$

Удобно (особенно в окрестности предельного солитона) представлять односолитонное решение в виде совокупности кинка – антикинка:

$$u(x, t) = \frac{A_{lim}}{2} (\tanh Z_+ - \tanh Z_-),$$

$$Z_{\pm} = \frac{\alpha}{\sqrt{24|\alpha_1|\beta}} (x - Vt \pm \delta), \quad (7)$$

тогда  $\delta$  определяет ширину предельного солитона.

Следует прежде всего отметить, что преобразование Миуры [8]

$$v = \frac{\alpha u + \alpha_1 u^2}{\sqrt{-6\alpha_1\beta}} + \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8)$$

сводит уравнение (3) к “классическому” уравнению Кортевега – де Вриза (1) и тем самым доказывает интегрируемость уравнения Гарднера методом обратной задачи теории рассеяния [8, 11] и, следовательно, упругий характер соударений солитонов. Тем не менее, “восстановление” функции  $u(x, t)$  через  $v(x, t)$  требует решения уравнения Рикатти (8), которое не решается в квадратурах. В то же время, простая замена переменных

$$u = A_{lim}/2 + w \quad (9)$$

сводит уравнение Гарднера (3) к модифицированному уравнению Кортевега – де Вриза (2) и позволяет также использовать известные точные решения этого уравнения. Однако большинство известных решений уравнения (2) относилось к нулевому пьедесталу и не может быть использовано для описания импульсных возмущений уравнения Гарднера. Поэтому мы использовали численное решение уравнения (3) для анализа процесса взаимодействия и генерации солитонов большой амплитуды. В расчетах принято:  $c = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\alpha_1 = -1$ ,  $\beta = 1$ .

**Взаимодействие солитонов.** Как и ожидалось, взаимодействие солитонов с амплитудами, меньшими предельной, идет по известному сценарию в уравнении

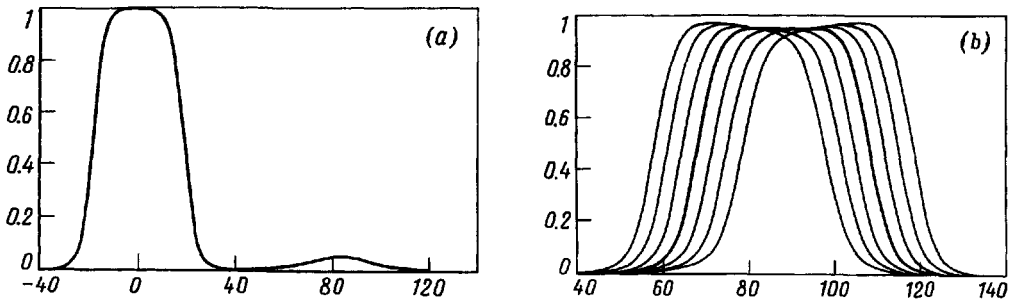


Рис.2. Взаимодействие предельного солитона с солитоном малой амплитуды (соотношение амплитуд 1 : 20): а) начальное распределение; б) для различных моментов времени, жирная линия – симметричное распределение

Кортевега – де Вриза: если разница в амплитудах велика, то большой солитон, имеющий большую скорость, просто перегоняет маленький; если же разница в скоростях невелика, то задний (большой) солитон отдает энергию переднему (меньшему) солитону и сам тормозится, передний же ускоряется (процесс обмена амплитудами между солитонами). Такое же обменное взаимодействие наблюдается для двух солитонов с амплитудами, близкими к предельной. Наиболее интересен случай, когда один из солитонов (находящийся сзади) имеет амплитуду, близкую к предельной, а второй, находящийся впереди, имеет “нормальную” амплитуду (рис. 2а). Даже если передний солитон является маленьким, в процессе взаимодействия “объединенная” волна не превышает порогового значения (рис. 2б), и в ней образуется провал, характерный для обменного взаимодействия. Для более близких значений амплитуд процесс взаимодействия показан на рис. 3 (отношение амплитуд 1.4): меньший солитон взаимодействует с передним склоном предельного солитона (который движется быстрее) и переворачивается на его вершине, свободно по ней движется и затем “сползает” по заднему склону предельного солитона, восстанавливая свою первоначальную полярность. Существование солитона отрицательной полярности на гребне предельного солитона можно понять уже из уравнения Гарднера (3): если рассматривать солитон на пьедестале  $u = A_{lim}$ , то решение будет удовлетворять тому же уравнению (3), но с квадратичной нелинейностью другого знака (в нашем случае – с отрицательной), что и приводит к появлению солитона отрицательной полярности. В то же время ясно из рис. 3, что малый солитон последовательно взаимодействует с каждым склоном предельного солитона, каждый из которых может быть интерпретирован как кинк и антикинк. Взаимодействие солитона с кинком (антикинком) “в чистом виде” уже анализировалось для модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза [1], к которому уравнение (3) может быть сведено строго заменой (9). Последовательное соударение сначала с кинком, а затем с антикинком и должно вести к восстановлению первоначальной полярности солитона, наблюдаемому в эксперименте. В сущности, и провал на рис. 2б может быть интерпретирован как солитон отрицательной полярности, правда, ввиду его большой ширины, его трудно интерпретировать, как результат взаимодействия солитона с кинком.

Итак, результат взаимодействия зависит от близости суммарной амплитуды солитонов к предельному значению. Если эта величина не превышает предельного значения, то взаимодействие солитонов происходит без изменения полярности соли-

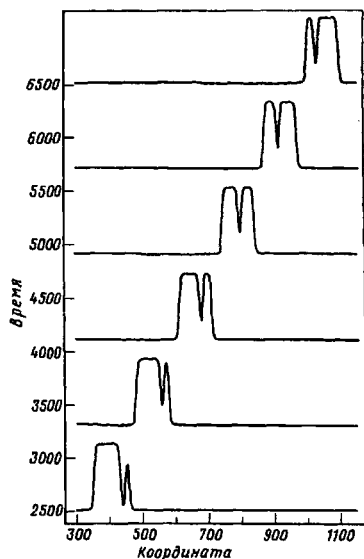


Рис.3. Взаимодействие предельного солитона с солитоном большой амплитуды (соотношение амплитуд 1 : 1.4) в различные моменты времени

тонов, и здесь наблюдаются процессы обгона (большая разница в амплитудах) или обмена (близкие амплитуды). Если же суммарная амплитуда превышает предельное значение, то в момент столкновения на фоне большой волны возникает провал и амплитуда волны в любой момент времени не превышает предельного значения. При этом взаимодействие маленького солитона с большим может быть интерпретировано, как последовательное взаимодействие солитона с каждым склоном предельного солитона (кинком и антикинком) с изменением его полярности на промежуточной стадии.

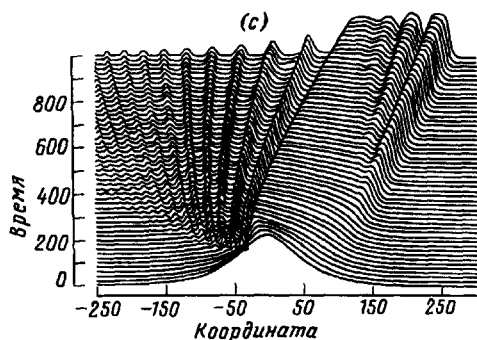
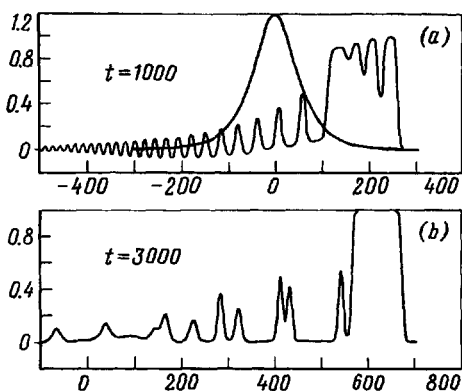


Рис.4. Эволюция начального возмущения с амплитудой, превышающей предельное значение: а)  $t = 0$  (жирная линия) и  $t = 1000$ ; б)  $t = 3000$ ; в) динамика взаимодействия

**Распад начального возмущения.** Распад начального возмущения с амплитудой, меньшей предельного значения, происходит опять по сценарию уравнения Кортевега – де Вриза: положительное начальное возмущение (в расчетах начальная форма описывалась  $\text{sech}$  функцией) распадается на группу солитонов (или один соли-

тон) и осциллирующий хвост. Интересные особенности возникают при распаде начального возмущения с начальной амплитудой, превышающей предельное значение (рис. 4а). В этом случае на первом этапе возникают два крутых (квазиударных) перепада, что связано с кубической нелинейностью (в чистом виде относительно уровня  $A_{lim}/2$ ). Затем на каждом перепаде начинается генерация мелкомасштабных волн, часть из которых трансформируется в солитоны, причем их полярность разная в зависимости от того, на каком пьедестале они генерируются (рис. 4а). Далее отрицательные солитоны на гребне волны взаимодействуют с антикинком и сходят с предельного солитона, изменяя свою полярность и накладываясь на группу солитонов, образованных при формировании антикинка (рис. 4б). В асимптотике формируется один предельный солитон и группа мелкомасштабных волн. Уширение начального возмущения с "запредельной" амплитудой приводит к формированию более широкого предельного солитона. Формирование предельного солитона уже предсказывалось обратной задачей теории рассеяния [12], однако анализ промежуточной стадии с формированием солитонов разной полярности не был сделан.

Итак, существование солитона предельной амплитуды в интегрируемых нелинейных системах ведет к новым эффектам во взаимодействии солитонов и их генерации из начальных возмущений, главным из которых является формирование на промежуточной стадии солитонов (одного или нескольких) противоположной полярности на гребне предельного солитона.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов ИНТАС (95-969), РФФИ (96-05-64108, 96-05-64111) и программы Миннауки "Нелинейная динамика". Авторы благодарны Т.Г.Талиповой, принимавшей участие в разработке численной программы решения уравнения Гарднера и обсуждении полученных результатов.

- 
1. Т.Л.Перельман, А.Х.Фридман, М.М.Эльяшевич, ЖЭТФ **66**, 316 (1974).
  2. Е.Н.Пелиновский, В.В.Соколов, Изв. высш. уч. зав., Радиофизика **19**, 536 (1976).
  3. R.Grimshaw, E.Pelinovsky, and T.Talipova, Monash University, Preprint **97/29** (1997), *Nonlinear Processes in Geophysics* (в печати).
  4. В.Е.Захаров, С.В.Маняков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский, *Теория солитонов*, М.: Наука, 1980.
  5. T.R.Marchant and N.F.Smyth, *J. Fluid Mech.* **221**, 263 (1990).
  6. A.S.Fokas and Q.M.Liu, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2347 (1996).
  7. T.Kakutani and N.Yamasaki, *J. Phys. Soc. Japan* **45**, 674 (1978).
  8. J.W.Miles, *Tellus* **31**, 456 (1979).
  9. Т.Г.Талипова, Е.Н.Пелиновский, Р.Гримшоу, Письма в ЖЭТФ **65**, 113 (1997).
  10. K.Lamb and L.Yan, *J. Phys. Ocean.* **26**, 2712 (1996).
  11. M.J.Ablowitz, D.J.Kaup, A.C.Newell, and H.Segur, *Stud. Appl. Math.* **53**, 249 (1974).
  12. J.W.Miles, *Tellus* **33**, 397 (1981).