

## ГЕНЕРАЦИЯ КВАДРАТУРНО-СЖАТОГО СВЕТА ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ В ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЯЮЩЕМ ВОЛОКНЕ

С.А. Подошведов<sup>1)</sup>

Южно-Уральский государственный университет  
454080 Челябинск, Россия

Поступила в редакцию 9 января 1998 г.

После переработки 21 апреля 1998 г.

Показана возможность генерации квадратурно-сжатых состояний векторного электромагнитного поля, в которых квантовые флуктуации в одной из квадратурных компонент меньше, чем в когерентном состоянии, в кубично-нелинейных средах (двулучепреломляющие волокна) с эффективным энергообменом между поляризационными модами поля. Показано, что при определенных распределениях начальной полной мощности между модами на выходе из волокна формируется свет с подавленными квантовыми флуктуациями в обеих поляризационных модах векторного поля. Выявлены оптимальные условия для получения квадратурно-сжатого света. Получены новые аналитические выражения степени сжатия в обеих поляризационных модах в случае, когда энергообмен между распространяющимися в волокне поляризационными компонентами поля отсутствует (собственные моды двухволнового смешения).

PACS: 42.50.-p

Интенсивно изучаемые в настоящее время возможности управления квантовыми флуктуациями лазерных полей представляют большой интерес как с точки зрения реализации фундаментальных физических экспериментов, так и в плане создания принципиально нового поколения вычислительных систем – оптических компьютеров [1]. Ключевые моменты современного состояния теоретических и экспериментальных исследований формирования сжатого света при нелинейно-оптических взаимодействиях отражены в работах [2,3]. Квантовый анализ оптических процессов на  $\chi^{(3)}$  нелинейностях, и в частности с учетом энергообмена, можно найти в [4-6].

Рассмотрим распространение двух связанных ортогонально поляризованных мод в кубично-нелинейной среде (двулучепреломляющие волокна или световоды, сохраняющие состояние поляризации, в которых преднамеренно создается сильное двулучепреломление и требуется идентификация медленной и быстрой осей волокна) при наличии нелинейной добавки к показателю преломления ( $n = n_0 + n_2 \cdot I$ , где  $n_2 = 3\chi_{xxxx}^{(3)}/8n_0 = 2.3 \cdot 10^{-22} \text{ м}^2/\text{В}^2$  – нелинейный показатель преломления;  $I$  — интенсивность поля внутри волокна). Три независимые компоненты  $\chi^{(3)}$  связаны с  $\chi_{xxxx}^{(3)}$  соотношением  $\chi_{xxxx}^{(3)} = \chi_{xyxy}^{(3)} + \chi_{yxyx}^{(3)} + \chi_{yyxx}^{(3)}$ . Относительная величина трех компонент зависит от конкретных физических механизмов, вносящих вклад в  $\chi^{(3)}$ . В кварцевых световодах, где  $\chi^{(3)}$  имеет в основном электронное происхождение, эти три компоненты почти одинаковы по величине [7]. С учетом сказанного уравнения, описывающие нелинейную динамику операторов векторного поля в данной среде,

<sup>1)</sup> e-mail: sergei@nlo.tu-chel.ac.ru

имеют вид

$$\frac{d\hat{A}_x}{dz} = \frac{iR}{3}\hat{A}_x^+\hat{A}_y^2 \exp(i\Delta k) + iR(\hat{A}_x^+\hat{A}_x + \frac{2}{3}\hat{A}_y^+\hat{A}_y)\hat{A}_x, \quad (1)$$

$$\frac{d\hat{A}_y}{dz} = \frac{iR}{3}\hat{A}_y^+\hat{A}_x^2 \exp(-i\Delta k) + iR(\frac{2}{3}\hat{A}_x^+\hat{A}_x + \hat{A}_y^+\hat{A}_y)\hat{A}_y, \quad (2)$$

где  $\hat{A}_x$ ,  $\hat{A}_y$  и  $\hat{A}_x^+$ ,  $\hat{A}_y^+$  – операторы рождения и уничтожения фотонов, поляризованных вдоль направлений  $x$  и  $y$ ;  $R = \nu\sqrt{2\hbar\omega/\epsilon_0 V}$  – нелинейный коэффициент связи,  $\nu = n_2\omega/cA$ ,  $\omega$  – несущая частота,  $A$  – эффективная площадь волокна,  $\Delta k = 2(k_y - k_x)$  – волновая расстройка;  $k_x$  и  $k_y$  – постоянные распространения мод.

Рассмотрим модель, согласно которой определим квантовые операторы векторного поля как

$$\hat{A}_x = \langle \hat{A}_x \rangle + \hat{a}_x, \quad (3)$$

$$\hat{A}_y = \langle \hat{A}_y \rangle + \hat{a}_y, \quad (4)$$

где  $\langle \hat{A}_x \rangle$ ,  $\langle \hat{A}_y \rangle$  – классические значения напряженностей векторного электромагнитного поля;  $\hat{a}_x$ ,  $\hat{a}_y$  – операторы уничтожения фотонов, которые описывают квантовые флуктуации поляризационных мод. Из (3), (4) получаем:  $\langle \Delta \hat{A}_x^2 \rangle = \langle \Delta \hat{a}_x^2 \rangle$ ,  $\langle \Delta \hat{A}_y^2 \rangle = \langle \Delta \hat{a}_y^2 \rangle$ . Подставляя (3), (4) в (1), (2) и удерживая в (1), (2) только члены, которые линейны по  $\hat{a}_x$ ,  $\hat{a}_y$ , в нулевом порядке по  $\hat{a}_x$ ,  $\hat{a}_y$  получим обычные нелинейные уравнения, которые описывают эволюцию классических напряженностей векторного электромагнитного поля. Представим данную систему как

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{3}(1 - 2\eta) \cos(2\psi) + \frac{2}{3}\eta - \frac{1}{3} + \frac{k}{2}, \quad (5)$$

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{2}{3}\eta(1 - \eta) \sin(2\psi), \quad (6)$$

где  $|q_y|^2 = \eta = |\langle \hat{A}_y \rangle|^2/N$ ;  $|q_x|^2 = |\langle \hat{A}_x \rangle|^2/N$ ;  $\varphi_x(s)$ ,  $\varphi_y(s)$  – фазы  $\langle \hat{A}_x(s) \rangle$ ,  $\langle \hat{A}_y(s) \rangle$ ;  $\psi = \varphi_y - \varphi_x + ks/2$ ;  $k = \Delta k L_{nl}$ ;  $s = z/L_{nl}$ ;  $L_{nl} = 1/RN$ ;  $|\langle \hat{A}_x \rangle|^2 + |\langle \hat{A}_y \rangle|^2 = N = \text{const}$ . Система уравнений (5), (6) может быть представлена в гамильтоновой форме [8,9] для двух канонически-сопряженных величин  $\eta$  и  $\psi$ :  $d\eta/ds = -\partial H/\partial\psi$ ;  $d\psi/ds = \partial H/\partial\eta$  с гамильтонианом  $H$ :

$$H = \frac{1}{3}\eta(1 - \eta) \cos(2\psi) + \frac{1}{3}\eta^2 - \frac{1}{3}\eta + \frac{k}{2}\eta. \quad (7)$$

Соответственно в первом порядке по  $\hat{a}_x$ ,  $\hat{a}_y$  получим систему линеаризованных уравнений для квантовых операторов  $\hat{a}_x$ ,  $\hat{a}_y$ . С практической точки зрения анализ более наглядно провести, если трансформировать их в уравнения для квадратурных операторов. Определим квадратурные операторы поляризационных мод выражениями

$$\hat{X}_x(s) = \frac{1}{2}(\hat{a}_x(s) \exp(-i\varphi_x(s)) + \hat{a}_x^+(s) \exp(i\varphi_x(s))), \quad (8)$$

$$\hat{Y}_x(s) = \frac{1}{2i}(\hat{a}_x(s) \exp(-i\varphi_x(s)) - \hat{a}_x^+(s) \exp(i\varphi_x(s))), \quad (9)$$

$$\hat{X}_y(s) = \frac{1}{2}(\hat{a}_y(s) \exp(-i\varphi_y(s)) + \hat{a}_y^+(s) \exp(i\varphi_y(s))), \quad (10)$$

$$\hat{Y}_y(s) = \frac{1}{2i}(\hat{a}_y(s) \exp(-i\varphi_y(s)) - \hat{a}_y^+(s) \exp(i\varphi_y(s))). \quad (11)$$

Проведя алгебраические преобразования, получим систему уравнений, описывающую динамику квадратурных операторов:

$$\frac{d\hat{X}_x}{ds} = -\frac{1}{3}|q_y|^2 \sin(2\psi)\hat{X}_x + \frac{2}{3}|q_y|^2 \cos(2\psi)\hat{Y}_x - \frac{2}{3}|q_x||q_y| \sin(2\psi)\hat{X}_y - \frac{2}{3}|q_x||q_y| \cos(2\psi)\hat{Y}_y, \quad (12)$$

$$\frac{d\hat{Y}_x}{ds} = 2|q_x|^2 \hat{X}_x + \frac{1}{3}|q_y|^2 \sin(2\psi)\hat{Y}_x + \frac{2}{3}|q_x||q_y|(2 + \cos(2\psi))\hat{X}_y - \frac{2}{3}|q_x||q_y| \sin(2\psi)\hat{Y}_y, \quad (13)$$

$$\frac{d\hat{X}_y}{ds} = \frac{2}{3}|q_x||q_y| \sin(2\psi)\hat{X}_x - \frac{2}{3}|q_x||q_y| \cos(2\psi)\hat{Y}_x + \frac{1}{3}|q_x|^2 \sin(2\psi)\hat{X}_y + \frac{2}{3}|q_x|^2 \cos(2\psi)\hat{Y}_y, \quad (14)$$

$$\frac{d\hat{Y}_y}{ds} = \frac{2}{3}|q_x||q_y|(2 + \cos(2\psi))\hat{X}_x + \frac{2}{3}|q_x||q_y| \sin(2\psi)\hat{Y}_x + 2|q_y|^2 \hat{X}_y - \frac{1}{3}|q_x|^2 \sin(2\psi)\hat{Y}_y. \quad (15)$$

Будем предполагать, что  $\hat{a}_x$  и  $\hat{a}_y$  находятся в вакуумном состоянии. Используя это, получим следующие соотношения между средними комбинациями квадратурных компонент поляризаационных мод светового поля:

$$\langle \hat{X}_i(0) \rangle = \langle \hat{Y}_i(0) \rangle = 0, \quad (16)$$

$$\langle \hat{X}_i(0)\hat{X}_j(0) \rangle = \frac{1}{4}\delta_{ij}, \quad \langle \hat{Y}_i(0)\hat{Y}_j(0) \rangle = \frac{1}{4}\delta_{ij}, \quad (17)$$

$$\langle \hat{X}_i(0)\hat{Y}_j(0) \rangle = \langle \hat{Y}_i(0)\hat{X}_j(0) \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad (18)$$

$$\langle \hat{X}_i(0)\hat{Y}_i(0) + \hat{Y}_i(0)\hat{X}_i(0) \rangle = 0, \quad (19)$$

где  $i = x$  и  $j = y$ . Линеаризованные квадратурно-операторные уравнения (12)–(15) могут быть записаны в виде

$$\frac{d\hat{X}}{ds} = G\hat{X}, \quad (20)$$

где  $\hat{X} = (\hat{X}_x, \hat{Y}_x, \hat{X}_y, \hat{Y}_y)^T$  — вектор-столбец, а вид матрицы  $G$  может быть получен с использованием (12)–(15). Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что решение (20) может быть представлено как  $\hat{X}(s) = S(s)\hat{X}(0)$ , где  $S(s)$  — квадратная матрица размером  $4 \times 4$  с вещественными элементами  $S_{ij}(s)$ . Уравнение для матрицы  $S_{ij}(s)$  имеет вид  $dS/ds = G(s)S(s)$ . Введем следующие величины:

$$S_{xx} = \sum_{j=1}^4 S_{1j}^2(s), \quad S_{yx}(s) = \sum_{j=1}^4 S_{2j}^2(s), \quad S_{xy}(s) = \sum_{j=1}^4 S_{3j}^2(s), \quad S_{yy}(s) = \sum_{j=1}^4 S_{4j}^2(s).$$

Чтобы найти степень квадратурного сжатия в поляризаационных модах, определим квадратурные операторы  $\hat{X}_x, \hat{Y}_x, \hat{X}_y, \hat{Y}_y$  с произвольными фазами  $\hat{\varphi}_x$  и  $\hat{\varphi}_y$ . В качестве примера, рассмотрим квадратурный оператор  $\hat{\hat{X}}_x = (\hat{a}_x \exp(-i\hat{\varphi}_x) + \hat{a}_x^+ \exp(i\hat{\varphi}_x))/2$ . Для оставшихся квадратурных операторов могут быть получены

подобные выражения. С помощью алгебраических вычислений запишем  $\hat{X}_x$  в следующем виде:  $\hat{X}_x = \hat{X}_x \cos \psi_x + \hat{Y}_x \sin \psi_x$ , где  $\psi_x = \bar{\varphi}_x - \varphi_x$ . Для дисперсии квадратурного оператора  $\hat{X}_x$  расчеты дают:

$$\langle \hat{X}_x^2 \rangle = S_{xx} \cos^2 \psi_x + S_{yx}^2 \sin^2 \psi_x + S_{xxy} \sin(2\psi_x), S_{xxy} = \sum_{j=1}^4 S_{1j} S_{2j}.$$

Процедура нахождения фазы  $\psi_x$ , при которой дисперсия  $\langle \hat{X}_x^2 \rangle$  принимает экстремальные значения ( $\partial \langle \hat{X}_x^2 \rangle / \partial \psi_x$ ), приводит к следующим результатам:

$$\tan(2\psi_x)_{(max,min)} = \frac{2S_{xxy}}{S_{xx} - S_{yx}}, \quad (21)$$

$$\sin(2\psi_x)_{(max,min)} = \pm \frac{2S_{xxy}}{\sqrt{(S_{xx} - S_{yx})^2 + 4S_{xxy}^2}}. \quad (22)$$

Рассмотрим (22) со знаком минус. Тогда, вводя нормированную дисперсию квадратурной компоненты  $\hat{X}_x$  как  $S_x = \langle \hat{X}_x^2(s) \rangle / \langle \hat{X}_x^2(0) \rangle$ , получим аналитическое выражение для минимальной нормированной дисперсии световой волны, поляризованной вдоль  $x$  (squeezing):

$$S_x = \frac{1}{2}(S_{xx} + S_{yx} - \sqrt{(S_{xx} - S_{yx})^2 + 4S_{xxy}^2}). \quad (23)$$

Соответственно при данном значении фазы  $\psi_x$  нормированная дисперсия  $\hat{Y}_x$  будет максимальной (desqueezing — знак + перед квадратным корнем в (23)). Беря  $\sin(2\psi)$  со знаком + в (22), имеем прямо противоположную картину. Нормированная дисперсия  $\hat{Y}_x$  будет минимальной, а  $\hat{X}_x$  — максимальной. Подобные выражения могут быть получены как для минимальной, так и для максимальной нормированных дисперсий в  $u$  поляризационной моде в случае, если  $\sin(2\psi_y) = \pm 2S_{yyx} / \sqrt{(S_{yy} - S_{yx})^2 + 4S_{yyx}^2}$ :

$$S_y = \frac{1}{2}(S_{yy} + S_{yx} - \sqrt{(S_{yy} - S_{yx})^2 + 4S_{yyx}^2}). \quad (24)$$

Выражение для  $D_y$  получим из (24), заменить знак минус на плюс перед квадратным корнем.

Решение классических уравнений (5), (6) может быть получено в терминах эллиптических функций Якоби. Аналитическое решение для линейризованных квадратурно-операторных уравнений (12) – (15) невозможно найти в наиболее общем случае. Рассмотрим устойчивые собственные моды (5), (6) [8,9], которые являются экстремальными точками гамильтониана (7) и определяются из условия  $d\psi/ds = d\eta/ds = 0$ . Анализ на устойчивость показывает, что существуют две устойчивые собственные моды ( $\eta_e, \psi_e$ ), которые определяются как  $\eta = 1/2(1 - 3/4k)$ ,  $\psi = \pi/2$  и  $\eta = 1/2(1 - 3/4k)$ ,  $\psi = 3\pi/2$ . При данном распределении полной мощности между поляризационными модами световой волны и соотношении фаз энергообмен между ними отсутствует, несмотря на наличие параметрического члена в уравнениях (5), (6). Решение уравнений (12) – (15) в данном случае записывается в виде

$$\hat{X}_x = \frac{1}{2}(1 + \cos(U))\hat{X}_{x0} - \frac{|q_y|}{2|q_x|} \sin(U)\hat{Y}_{x0} + \frac{|q_y|}{2|q_x|} (1 - \cos(U))\hat{X}_{y0} + \frac{1}{2} \sin(U)\hat{Y}_{y0}, \quad (25)$$

$$\hat{Y}_x = \left(\frac{4}{3}|q_x|^2 s + \frac{|q_x|}{2|q_y|} \sin(U)\right) \hat{X}_{x0} + \frac{1}{2}(1 + \cos(U)) \hat{Y}_{x0} + \left(\frac{4}{3}|q_x||q_y|s - \frac{1}{2} \sin(U)\right) \hat{X}_{y0} + \frac{|q_x|}{2|q_y|}(1 - \cos(U)) \hat{Y}_{y0}, \quad (26)$$

$$\hat{X}_y = \frac{|q_x|}{2|q_y|}(1 - \cos(U)) \hat{X}_{x0} + \frac{1}{2} \sin(U) \hat{Y}_{x0} + \frac{1}{2}(1 + \cos(U)) \hat{X}_{y0} - \frac{|q_x|}{2|q_y|} \sin(U) \hat{Y}_{y0}, \quad (27)$$

$$\hat{Y}_y = \left(\frac{4}{3}|q_x||q_y|s - \frac{1}{2} \sin(U)\right) \hat{X}_{x0} + \frac{|q_y|}{2|q_x|}(1 - \cos(U)) \hat{Y}_{x0} + \left(\frac{4}{3}|q_y|^2 s + \frac{|q_y|}{2|q_x|} \sin(U)\right) \hat{X}_{y0} + \frac{1}{2}(1 + \cos(U)) \hat{Y}_{y0}, \quad (28)$$

где  $U = (4|q_x||q_y|s)/3$ ,  $\hat{X}_{i0} = \hat{X}_i(s=0)$ ,  $\hat{Y}_{i0} = \hat{Y}_i(s=0)$ . Для  $S_{xx}$ ,  $S_{yx}$ ,  $S_{xy}$ ,  $S_{yy}$ ,  $S_{xxy}$ ,  $S_{yyx}$  расчеты дают

$$S_{xx} = \frac{1}{2}(1 + \cos(U)) + \frac{|q_y|^2}{2|q_x|^2}(1 - \cos(U)), \quad (29)$$

$$S_{yx} = \frac{16}{9}|q_x|^2 s^2 + \frac{4|q_x|}{3|q_y|} (|q_x|^2 - |q_y|^2) s \sin(U) + \frac{1}{2|q_y|^2} + \frac{|q_y|^2 - |q_x|^2}{2|q_y|^2} \cos(U), \quad (30)$$

$$S_{xxy} = \frac{2}{3}s + \frac{|q_x|^2 - |q_y|^2}{2|q_x||q_y|} \sin(U) + \frac{2}{3}(|q_x|^2 - |q_y|^2) s \cos(U). \quad (31)$$

Выражения для  $S_{xy}$ ,  $S_{yy}$  и  $S_{yyx}$  могут быть получены из (29) – (31) заменой  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$ . На рис.1 представлены графики зависимостей  $S_x$   $S_y$  от длины волокна, нормированного на полную длину волокна ( $L$  – длина волокна) для  $k = -0.5$  (значение устойчивой собственной моды  $\eta_e = 11/16$ ). Для данного случая  $k = 2\omega L_{ni}(n_y - n_x)/c = -0.5$  имеем, что  $y$ -компонента светового поля поляризована вдоль быстрой, а  $x$ -компонента вдоль медленной оси волокна. Как видно из рис.1, минимальные значения нормированных дисперсий  $\hat{a}_x$ ,  $\hat{a}_y$  испытывают резкий спад до некоторого уровня на начальном этапе распространения, в дальнейшем, осциллируя около него. Из рис.1 видно, что на выходе из волокна можно наблюдать подавление квантовых шумов в быстрой моде, более сильное по сравнению с медленной модой векторного поля.

Рассмотрим другой предельный случай для  $k = -0.5$ . Возьмем следующие значения:  $\eta(0) = 0.375$ ,  $|q_x(0)|^2 = 0.625$ ,  $\psi(0) = \pi/2$  или  $\psi(0) = 3\pi/2$ . Значение гамильтониана (7) для данной неустойчивой моды с  $\eta = 1$  будет  $H = -0.25$ . Соответствующее решение (5), (6) может быть представлено в виде комбинаций гиперболических функций:

$$|q_x(s)|^2 = 0.625 \operatorname{sech}^2(U), |q_y(s)|^2 = 1 - 0.625 \operatorname{sech}^2(U), \quad (32)$$

$$\cos(2\psi(s)) = \frac{0.25 - 0.625 \operatorname{sech}^2(U)}{1 - 0.625 \operatorname{sech}^2(U)}, \sin(2\psi(s)) = \frac{\sqrt{0.9375} \tan(U)}{1 - 0.625 \operatorname{sech}^2(U)}, \quad (33)$$

где  $U = 0.3227s$ . Численно решая систему уравнений (20), где  $|q_x(s)|$ ,  $|q_y(s)|$ ,  $\cos(2\psi(s))$  и  $\sin(2\psi(s))$  эволюционируют согласно (32), (33), наблюдаем зависимость  $S_x(s)$ ,  $S_y(s)$ , такую, какая представлена на рис.2. Из рис.2 видно, что с увеличением длины волокна  $S_x(s)$  стремится к нулю, тогда как  $S_y(s) \rightarrow 0.15$ . Соответственно,

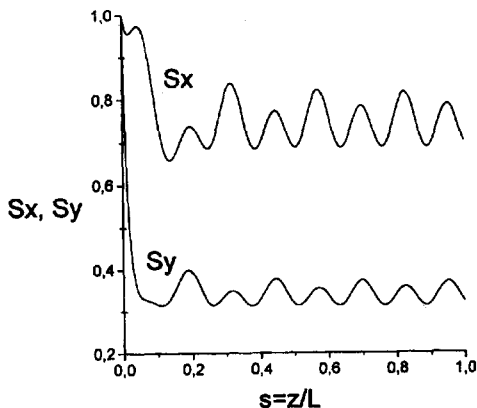


Рис.1. Минимальные значения нормированных дисперсий  $S_x(s)$ ,  $S_y(s)$  в собственных модах двухволнового смещения в зависимости от нормированного расстояния  $s = z/L$  ( $L/L_{nl} = 40$ ;  $k = -0.5$ )

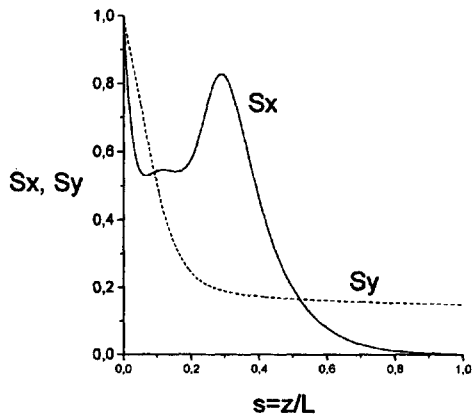


Рис.2.  $S_x(s)$ ,  $S_y(s)$  как функции  $s = z/L$  ( $L/L_{nl} = 20$ ;  $k = -0.5$ ) для случая полного энергообмена из медленной моды в быструю

как следует из (32), (33),  $|q_x(s)|^2 \rightarrow 0$ , а  $|q_y(s)|^2 \rightarrow 1$ . Из волокна выходит линейно поляризованный свет со значительно подавленным уровнем квантовых шумов.

В настоящей работе развита квантовая теория двухмодового взаимодействия в двулучепреломляющем волокне. Решены две новые задачи. Показана возможность подавления квантовых флуктуаций в поляризационных модах векторного поля, взаимодействующих между собой на кубичной нелинейности в волокне.

1. Новые физические принципы оптической обработки информации, под ред. С.А.Ахманова, М.: Наука, 1990.
2. J.Opt.Soc.Amer. В4, №10 (1987).
3. Д.Ф.Смирнов, А.С.Трошин, УФН 153, 233 (1987).
4. А.С.Чиркин, А.А.Орлов, Д.Ю.Паращук, КЭ 20, 999 (1993).
5. А.П.Алоджанц, Г.А.Джейранян, Л.П.Геворкян, С.М.Аракелян, КЭ 20, 786 (1993).
6. А.П.Алоджанц, С.М.Аракелян, А.С.Чиркин, ЖЭТФ 108, 63 (1995).
7. Г.Агравал, Нелинейная волоконная оптика, М.: Наука, 1996.
8. С.А.Подошведов, Письма в ЖТФ 23, 61 (1997).
9. S.A.Podoshvedov, Optics Commun. 142, 79 (1997).