

О СТРУКТУРЕ И УСТОЙЧИВОСТИ ДВУМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

А.А.Жмудский, Б.А.Иванов

*Киевский университет им. Т.Шевченко
Киев, Украина*

*Институт магнетизма НАН, Украина
252680 Киев, Украина*

Поступила в редакцию 5 января 1997 г.

После переработки 28 мая 1997 г.

Исследованы динамические солитоны в одноосных и ромбических магнетиках. Показано, что центрально-симметричные солитоны могут быть неустойчивы относительно эллиптических искажений.

PACS: 75.30.-m

1. Нелинейные возбуждения – топологические солитоны (см. [1]) играют важную роль в физике низкоразмерных магнетиков [2,3]. Для двумерных (2D) магнетиков с дискретным вырождением, то есть магнетиков с анизотропией типа легкая ось или ромбических, существен учет локализованных стабильных (достаточно долго живущих) 2D солитонов [2,3]. Согласно экспериментам [4], они определяют релаксацию магнитных возмущений и могут приводить к появлению пиков в функциях отклика [5].

2. Рассмотрим ромбический ферромагнетик (ФМ) с энергией вида

$$W = \int d^2x \left\{ A \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 \right] + K(1 + \epsilon \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta \right\}, \quad (1)$$

где θ и φ определяют вектор намагниченности $m, m^2 = 1, m_x + im_y = -\sin \theta \exp(i\varphi)$, A и K – константы обмена и анизотропии, ϵ описывает анизотропию в базисной плоскости. Согласно теореме Хобарта–Деррика, см. [1–3], для такой модели не существуют статические стабильные 2D солитоны. Однако для модели (1) возможны динамические солитоны (прецессионные для чисто одноосного ФМ с $\epsilon = 0$ [1–3] или ротационные [6,3]). Их существование обусловлено сохранением z -проекции орбитального момента поля намагниченности L или (при $\epsilon = 0$) z -проекции полного спина S . В единицах постоянной Планка \hbar (s – спин атома, a – постоянная решетки)

$$L = (s/a^2) \int d^2x (1 - \cos \theta) [r, \nabla \varphi], \quad S = (s/a^2) \int d^2x (1 - \cos \theta). \quad (2)$$

Рассмотрим ротационные солитоны, существование которых обусловлено точной (даже при $\epsilon \neq 0$) симметрией (1) относительно пространственных поворотов в плоскости 2D магнетика (x, y) . Этому солитону отвечает динамическое, но стационарное во вращающейся системе координат, $\bar{x} = x \cos \omega t - y \sin \omega t, \bar{y} = x \sin \omega t + y \cos \omega t$, решение уравнения Ландау–Лифшица вида $\theta(\bar{x}, \bar{y}), \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ [6]. При $\epsilon = 0$ можно выбрать простое центрально-симметричное (ЦС) решение $\theta = \theta_0(r), \varphi = \nu\chi + \varphi_0$, где ν – топологический заряд, $r = (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{1/2}$,

$\chi = \arctg(\bar{y}/\bar{x})$ – полярные координаты во вращающейся системе. Функцию $\theta_0(r)$ легко найти, решив уравнение в обыкновенных производных, см. [1–3].

Для решений, не обладающих центральной симметрией (мы увидим, что они существуют как для случая $\epsilon \neq 0$, так и при $\epsilon = 0$) ситуация сложнее. Структура солитона определяется двумя нелинейными уравнениями в частных производных для функций $\theta(r, \chi)$, $\varphi(r, \chi)$. Общего метода анализа локализованных решений таких уравнений и их устойчивости не существует. Солитонные решения могут строиться численно методом молекулярной динамики, но это требует длительной работы даже современных компьютеров [7]. Поэтому для анализа структуры и устойчивости солитонов мы используем прямые вариационные методы.

3. Уравнения для $\theta(r, \chi)$, $\varphi(r, \chi)$ могут быть получены как условие экстремальности вспомогательного функционала $\Lambda\{\theta, \varphi\} = W - \hbar\omega L$ [6]. Солитон отвечает условному экстремуму энергии при заданном L , величина $\hbar\omega$ имеет смысл множителя Лагранжа, $dE(L)/dL = \hbar\omega$.

Для тех моделей ФМ, в которых существуют статические солитоны, см. [2,3,8], функционалы Λ и W совпадают и вопрос об устойчивости решается просто: стабильному солитону отвечает минимум энергии. Для динамического солитона ситуация сложнее: и стабильному, и нестабильному солитонам (1) отвечает седловая точка функционала Λ , см. ниже.

В соответствии с прямым методом Ляпунова, см., например, [9], солитон стабилен, если существует функционал Ляпунова $\bar{\Lambda}\{\theta, \varphi\}$, такой, что: (i) он положительно определен вблизи солитонного решения; (ii) его производим по времени, найденная с учетом уравнений движения, отрицательна или равна нулю. Выбирая функционал Ляпунова в виде комбинации интегралов движения, $\bar{\Lambda} = \Lambda + B(L - L_0)^2$, где L_0 – значение L в солитоне, B – константа, можно удовлетворить условию (ii) в виде $d\bar{\Lambda}/dt = 0$.

Такой же функционал Ляпунова $\bar{\Lambda}$ был выбран для анализа устойчивости нетопологических магнитных солитонов [9]. При этом оказалось, что если в некоторой области вблизи солитона $\bar{\Lambda} < 0$, то солитон неустойчив. Мы показали, что это условие неустойчивости справедливо и для ЦС топологических солитонов (функционал Четаева, описывающий неустойчивость, выбирается в том же виде, что и в [9]). Таким образом, солитоны устойчивы при выполнении условия $\bar{\Lambda} > 0$, а нарушение этого условия, во всяком случае для ЦС солитонов, свидетельствует об их неустойчивости.

4. Будем искать солитон на классе пробных функций, зависящих от n параметров a_1, \dots, a_n . Тогда $\Lambda\{\theta, \varphi\} \rightarrow \Lambda(a_1, \dots, a_n, \omega)$ и условие экстремума имеет вид системы n алгебраических уравнений $\partial\Lambda/\partial a_i = 0$. Найдя их решения $a_i^{(0)}$, можно вычислить энергию солитона $E(\omega)$, $L(\omega)$ и построить зависимость $E = E(L)$.

Для анализа условия устойчивости (i) исследуем $\bar{\Lambda}$ при малых отклонениях параметров a_i от $a_i^{(0)}$. Введя $\alpha_i = a_i - a_i^{(0)}$, запишем

$$\bar{\Lambda} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \Lambda_{ik} \alpha_i \alpha_k + \frac{1}{2} B \left(\sum_i L_i \alpha_i \right)^2, \quad \Lambda_{ik} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial a_i \partial a_k}, \quad L_i = \frac{\partial L}{\partial a_i}$$

Приведем матрицу Λ_{ik} к диагональному виду, $\Lambda_{ik} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Собственные значения ϵ_i квадратичной формы $\bar{\Lambda}$ определяются детерминантом

системы $(\lambda_i - \epsilon)\alpha_i + BL_i(\sum_j A_j \alpha_j) = 0$. Умножив i -е уравнение на $L_i/B(\lambda_i - \epsilon)$, просуммировав по i , сократив на $\sum_i A_i \alpha_i$ и рассмотрев предел $B \rightarrow \infty$, дисперсионное уравнение H получим $F(\epsilon) \equiv \sum_i L_i^2 / (\lambda_i - \epsilon) = 0$. Его решения ϵ_i лежат между λ_i и λ_{i+1} , см. рис.1. Следовательно, если матрица Λ_{ik} имеет два или более отрицательных собственных значения, то одно из $\epsilon_i < 0$ и солитон неустойчив. Если же только одно λ отрицательно, то устойчивость определяется знаком $F(0)$: при $F(0) > 0$ минимальное $\epsilon < 0$, а при $F(0) < 0$ все ϵ положительны и солитон устойчив. Величину $F(0)$ можно связать с производной $dL/d\omega$. Действительно, запишем $dL/d\omega = \sum_i L_i (da_i/d\omega)$. Продифференцировав соотношение $\partial E/\partial a_i - \hbar\omega \partial L/\partial a_i = 0$ по ω , получим $\sum_k \Lambda_{ik} (da_k/d\omega) = \hbar L_i$, откуда следует, что $dL/\hbar d\omega = F(0)$.

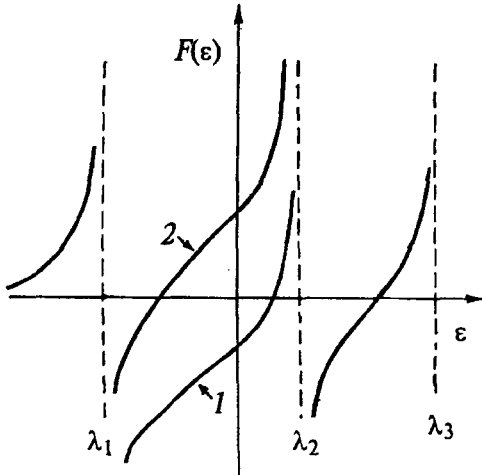


Рис.1. Вид функции $F(\epsilon)$. Кривые 1 и 2 отвечают $F(0) < 0$ и $F(0) > 0$

Таким образом, как и для нетопологических солитонов, см. [1,2, 9–11], условие устойчивости топологического солитона может быть записано через его интегральные характеристики. Поэтому можно надеяться, что использование пробных функций дает достаточно хорошие результаты.

5. Конкретные вычисления были проведены с пробной функцией вида

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{R}{r} \exp\left(-\frac{r}{b}\right) (1 + C_1 \cos 2\chi), \quad \varphi = \chi + \varphi_0 + C_2 \sin 2\chi, \quad (3)$$

которая зависит от пяти пробных параметров $R, b, C_1, C_2, \varphi_0$ дает хорошее приближение структуры солитона [8]. Действительно, зависимость $\theta_0(r)$ (3) обеспечивает описание предела Белавина–Полякова, адекватного при $R \ll \Delta$, и экспоненциальное убывание $\theta(r)$ при $r > \Delta$, $\Delta = \sqrt{A/K}$ – характерная длина. Угловые зависимости согласуются с полученными при $R \ll \Delta$ или $\epsilon \ll 1$ [8]. Для решения уравнений $\partial \Lambda / \partial a_i = 0$ использовался итерационный метод Ньютона, начальные значения параметров a_i задавались вручную. По найденным $a_i^{(0)}$ вычислялись E, L и S , а также собственные числа матрицы Λ_{ik} . Зависимости $E(L)$ и $S(L)$ приведены на рис.2.

Для всех значений ϵ при $\omega_0 - \omega \ll \omega_0$, где ω_0 – щель в спектре магнонов, радиус солитона мал, $R \ll \Delta$. При $\omega \rightarrow \omega_0$ его энергия стремится к величине $E_0 = 8\pi A$, равной энергии Белавина–Полякова, при этом L много меньше

характерной величины $L_0 = 2\pi s(\Delta/a)^2$, $L_0 \gg 1$. Значения параметров анизотропии C_1 и C_2 при $L \ll L_0$ оставались малыми даже при $\epsilon \sim 1$ (C_1 и $C_2 < 10^{-2}$ при $\epsilon = 0.5$ и $\omega \geq 0.8\omega_0$, что отвечает $L \leq 0.03L_0$). При уменьшении частоты значения E и L растут, то есть $d\omega/dL < 0$. Для ФМ с $\epsilon \neq 0$ при этом также растут параметры C_1 и C_2 .

В изотропном случае $\epsilon = 0$ при всех значениях $\omega \leq \omega_0$ легко получались ЦС солитоны с $C_1, C_2 \leq 10^{-6}$. Для ЦС решений $L(\omega) = -S(\omega)$ (в солитоне $L < 0$, см. [1,7]), а функция $E(S)$ с точностью до 10^{-4} не отличалась от полученной ранее интегрированием уравнений для $\theta_0(r)$ [1-3]. Это демонстрирует адекватность метода и пробной функции (3).

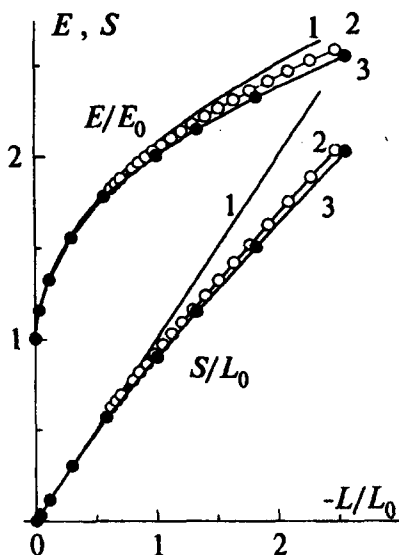


Рис.2. Зависимости $E(L)$ и $S(L)$ (в единицах E_0, L_0). Кривые 1 (без символов), 2 (o) отвечают ЦС и анизотропному солитону при $\epsilon \rightarrow 0$, 3 (•) - солитону при $\epsilon = 0.5$

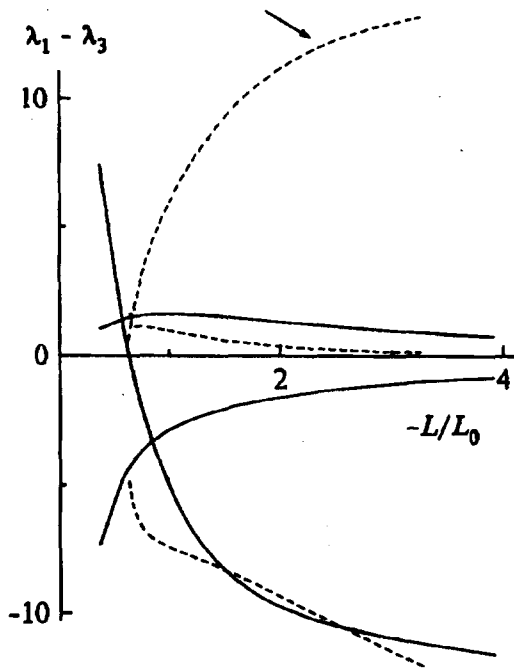


Рис.3. Зависимости трех нижних значений λ от L при $\epsilon = 0$, сплошная и штриховая линии отвечают ЦС и анизотропному солитонам. Отмеченная стрелкой кривая изображена в масштабе 1/2

Оказалось, что решение может быть неоднозначным. (Программа находила то или иное решение в зависимости от выбора начальных значений a_i .) В частности, при малых ϵ (рассматривалось $\epsilon = 0$ и $\epsilon = 10^{-4}$, различия для этих случаев практически не были заметны) при $\omega \leq 0.5\omega_0$ помимо ЦС были найдены и анизотропные решения, для которых C_1, C_2 не малы. Важно, что для этих решений значение $|L(\omega)|$ росло при уменьшении ω гораздо быстрее, чем $S(\omega)$. Поэтому зависимости $E(L)$ и $E(S)$ принципиально различались: если рассматривать солитоны с фиксированным значением S , то меньшую энергию имеют ЦС солитоны, если же фиксировать L , то анизотропные. Для анизотропных моделей с немалыми ϵ значение $|L(\omega)|$ росло еще быстрее, чем

для анизотропного солитона в ФМ с $\epsilon \approx 0$. Получилось, что хотя энергия солитона в ФМ с $\epsilon \neq 0$ при данном ω заведомо больше, чем при $\epsilon = 0$, энергия солитона в ФМ с анизотропной базисной плоскостью при данном L ниже, чем при $\epsilon = 0$.

При вычислении собственных значений λ_i матрицы $\Lambda_{ik} = \partial^2 \Lambda / \partial a_i \partial a_k$ оказалось, что по крайней мере одно $\lambda_i < 0$ и солитонам отвечает седловая точка Λ . Для всех рассмотренных солитонов производная $dL/d\omega < 0$, что необходимо для их стабильности. Оказалось, что второе условие – то, что отрицательно только одно собственное значение λ_1 , выполняется только для того солитона, энергия которого минимальна при данном L . В частности, для ЦС солитона в ФМ с $\epsilon \approx 0$ второе собственное значение $\lambda_2 \geq 0$ только при $\omega \geq 0.5\omega_0$. При $\omega \leq 0.5\omega_0$, когда появляется анизотропное решение, знак λ_2 меняется и ЦС солитон теряет устойчивость, см. рис.3. При этом для анизотропного солитона отрицательно только λ_1 , и он устойчив во всей области своего существования. Для нетопологических неоднородных солитонов в широком классе моделей знаки λ одинаковы при всех параметрах солитона ([10,9], см. также [11]).

Таким образом, в ФМ с немалой анизотропией в базисной плоскости присутствуют динамические ротационные солитоны с энергией E , близкой к E_0 . В одноосном ФМ существуют прецессионные ЦС солитоны, но при не очень большой энергии $E \geq 1.83E_0$ происходит спонтанное нарушение их симметрии: они теряют устойчивость и устойчив анизотропный солитон. Устойчивость топологических солитонов и анизотропные 2D солитоны в изотропных моделях, насколько нам известно, ранее не обсуждались.

Авторы благодарны Ю.С.Кившарю за обсуждения. Работа частично поддержана грантом 2.4/27 Фонда фундаментальных исследований Украины.

-
1. A.M.Kosevich, B.A.Ivanov, and A.S.Kovalev, Phys. Rep. **194**, 117 (1990).
 2. V.G.Bar'yakhtar and B.A.Ivanov, Soviet Scientific Rev. Sec. A-Phys. Ed. I.M.Khalatnikov, **16**, #3 (1992).
 3. Б.А.Иванов, А.К.Колежук, ФНТ **21**, 355 (1995).
 4. F.Waldner, JMMM **31-34**, 1203 (1983); **54-57**, 873 (1986).
 5. Б.А.Иванов, А.К.Колежук, ФНТ **16**, 335 (1990); А.К.Колежук, Д.В.Филин, ФНТ **20**, 1267 (1994).
 6. Б.А.Иванов, Письма в ЖЭТФ **56**, 118 (1992).
 7. N.Papanikolaou and W.J.Zakrzewski, Physica **D80**, 225 (1995).
 8. А.А.Жмудский, Б.А.Иванов, ФНТ **22**, 446 (1996).
 9. B.A.Ivanov and A.L.Sukstanskii, Sol. St. Comm. **50**, 523 (1984).
 10. Н.Г.Вахитов, А.А.Колоколов, Изв. ВУЗов, Радиопизика **16**, 1020 (1973).
 11. V.G.Makhankov, Phys. Rep. **35**, 1 (1978).