Письма в ЖЭТФ, том 18, вып. 7, стр 443 – 447 5 октября 1973 г.

π-МЕЗОННАЯ КОНДЕНСАЦИЯ В НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗДАХ

А.Б. Мигдал

Найдено выражение для плотности энергии ядерного вещества в присутствии π-конденсата произвольной плотности, существенно отличающееся от полученного в [5]. Показано, что фазовый переход второго рода с образованием π-конденсата, предположенный в [5], не реализуется. Доказано, что рассмотренная модель устойчива также и относительно фазового перехода первого рода.

1. Введение.

В [1] было показано, что в достаточно плотной нуклонной среде возникает фазовый переход с образованием π-конденсата. В [2] был разработан метод нахождения спектра пионов в ядерном веществе и было показано, что в случае $N = Z$ при плотности нуклонов $n_c < n_0$ (n_0 – ядерная плотность) возникает электрически нейтральный конденсат π^0, π^+, π^--мезонов. В [3] и [4] тем же методом рассмотрен случай $Z << N$ (нейтронная звезда). При плотности $n \approx 0{,}6\, n_0$ возникает конденсат π^0-мезонов и примерно при такой же плотности электрически нейтральный конденсат $\pi^+\pi^-$-мезонов. Предположенный в [5] конденсат π^--мезонов не возникает. Ниже указано, в чем состояла ошибка авторов [5]. Неправильность выражения для плотности энергии полученного в [5] очевидна из того, что даже при плотности меньшей, чем критическая, это выражение неаналитически зависит от константы взаимодействия! Спектры π^0, π^+, π^--мезонов для $Z << N$ приведены в [3] и [4]. Условием фазового перехода второго рода является появление неустойчивости в этих спектрах. Для выяснения вопроса о возможности фазового перехода первого рода с образованием конденсата сразу конечной плотности необходимо найти энергию системы при произвольной плотности конденсата и сравнить эту энергию с энергией системы, в которой не произошел фазовый переход или (если $n > n_c$) с энергией системы, в которой произошли указанные выше фазовые переходы второго рода.

Мы найдем энергию системы в модели нуклоны + конденсат π^--мезонов с волновым вектором $\mathbf{k}$. Попытка решения этой задачи была сделана в [5]. Однако, помимо решающей ошибки в расчете, о которой будет сказано ниже, метод среднего поля, использованный в [5], даже при правильном применении не может дать количественных результатов и должен быть заменен более точным методом, состоящим в нахождении эффективного лагранжиана пионов. Показано, что рассмотренная модель устойчива относительно фазового перехода первого рода. Фазовый переход второго рода возникает в этой модели при условии $\omega(k) < \epsilon_F$ ($\omega(k)$ – энергия ионов в среде), которое в реальном случае не осуществляется [3]. Заметим, что все выдвинутые до сих пор возражения против метода развитого в [2] оказались несостоятельными (см. [4]).

2. Метод среднего поля.

Для краткости используем символическую запись, опуская импульсные и спиновые индексы. Тогда гамильтониан H можно записать в виде ($\hbar = c = m_\pi = 1$).

$$H = \Sigma E^{(n)} n^+ n + \Sigma E^{(p)} p_0^+ p_0 + \omega_0 a^+ a + iM(np_0^+ a^+ - n^+ p_0 a), \qquad (1)$$

где $M = fk/\sqrt{\omega_0}$; n, p_0, a – операторы нейтронного, протонного и пионного полей, $\omega_0^2 = 1 + k^2$.

Операторы a и a^+ заменяются классическими величинами, и вместо (1) рассматривается следующий гамильтониан ("метод среднего поля" [5]).

$$H = \Sigma E^{(n)} n^+ n + \Sigma(E^{(p)} + \mu) p^+ p + iM\sqrt{\nu}(np^+ - n^+ p) + (\omega_0 - \mu)\nu. \qquad (2)$$

С дополнительным условием электронейтральности $\Sigma < p^+ p > = \nu$.

Заметим, что гамильтониан (2) может быть получен из (1) заменой $a = \sqrt{\nu} e^{-i\omega t}$, $a^+ = \sqrt{\nu} e^{i\omega t}$. Сдвигая энергию протонов на величину $\mu = \omega$ т. е вводя $\hat{p} = \hat{p}_0 e^{i\omega t}$; $\hat{p}^+ = \hat{p}_0^+ e^{-i\omega t}$ получим независящий от времени гамильтониан (2). Таким образом заранее ясно, что μ в (2) совпадает с новой частотой пионов $\omega(k)$ и в случае гамильтониана (1) может быть найден вычислением поляризационного оператора пионов. Как мы увидим, этот же результат получается при правильном использовании гамильтониана (2). Поскольку в (2) участвуют только два состояния – нейтрон с энергией $E^{(n)}(p)$ и протон с энергией $E^{(p)}(\mathbf{p} + \mathbf{k})$ ($\mathbf{k}$ – единственный волновой вектор конденсата), то новые энергии нуклонов находятся из простого секулярного уравнения. Пренебрегая везде разностью кинетических энергий $E^{(n)}(p) - E^{(p)}(\mathbf{p} + \mathbf{k})$, что, как показано в [5] дает малую ошибку, получим

$$\tilde{E}^{(n)} = E^{(n)} - \frac{\mu}{2}\left(-\sqrt{1 + \frac{4M^2\nu}{\mu^2}}\right); \quad \tilde{E}^{(p)} = E^{(p)} + \frac{\mu}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4M^2\nu}{\mu^2}}\right). \qquad (3)$$

Для полной энергии системы имеем

$$E = \sum_{p < p_F^n} \tilde{E}^{(n)}(p) + \sum_{p < p_F^p} \tilde{E}^{(p)}(p) + (\omega_0 - \mu)\nu, \qquad (4)$$

где

$$(p_F^n)^3/3\pi^2 = n - \tilde{\nu}; \quad (p_F^p)^3/3\pi^2 = \tilde{\nu}$$

$n - \tilde{\nu}$ – число "новых" нейтронов, $\tilde{\nu}$ – число "новых" протонов. Из (3) и (4) получаем

$$E = E_0[(1 - \tilde{x})^{5/3} + \tilde{x}^{5/3}] + (n - 2\nu)\frac{\mu}{2} + \frac{n - 2\tilde{\nu}}{2}\mu\sqrt{1 + \frac{4M^2\nu}{\mu^2}}, \qquad (5)$$

где $\tilde{x} = \tilde{\nu}/n$, $E_0 = \frac{3}{5} n\epsilon_F$. Выражение (5) содержит два параметра

μ и ν. Минимизируя E по μ находим

$$(n - 2\nu)\gamma = n - 2\tilde{\nu}; \qquad \gamma = \sqrt{1 + \frac{4M^2\nu}{\mu^2}} \tag{6}$$

соотношение между плотностью старых (ν) и новых ($\tilde{\nu}$) протонов. Легко убедиться, что это же соотношение получается из условия $\Sigma\langle p^+p\rangle = \nu$. Минимизируя по ν получим

$$\mu = \omega_0 - \frac{(n - 2\tilde{\nu}) f^2 k^2}{\omega_0 \mu \gamma}. \tag{7}$$

Выражение (7) представляет собой, как легко видеть, уравнение для новой частоты пионов в гамильтониане (1) в соответствии с соотношением $\mu = \omega(k)$. Ошибка авторов [5] состояла в том, что, находя минимум величины $E + \mu\nu$ (которая не должна быть минимальна), они положили $\tilde{\nu} = 0$. Легко видеть, что из (6) при $\tilde{\nu} = 0$ действительно получается, то неправильное выражение для μ, которое приведено в [5].

После исключения ν и μ с помощью (6) и (7) получаем выражение для энергии, как функции числа протонных возбуждений $\tilde{\nu}$. Особенно наглядные результаты получаются при $\tilde{x} << 1$. Из уравнения (5), (6) и (7) получаем

$$\tilde{\nu} = \left(1 - \frac{nM^2}{\mu^2}\right)\nu, \tag{6'}$$

$$\mu = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4M^2 n}{\omega_0^2}}\right)\frac{\omega_0}{2}, \tag{7'}$$

$$E - E_0 = (\omega(k) - \epsilon_F)\nu. \tag{5'}$$

Из (6′) следует, что $1 - nM^2/\mu^2 > 0$, что как нетрудно видеть, дает $\omega > \omega_0/2$ и соответствует выбранному нами знаку корня в (7′). Если для некоторого интервала $k_1 < k < k_2$ величина $a_k = 4f^2k^2n/\omega_0^3 > 1$, то вещественное решение (7′) существует только вне этого интервала. В точках $a_k = 1$, $d\omega/dk = \infty$, а $\omega = \omega_0/2$. Таким образом условие $a_k = 1$ соответствует разрыву в пионном спектре. Выражение (5′) имеет наглядный физический смысл: изменение энергии системы при превращении одного нейтрона в протон и π-мезонное возбуждение равно, как и должно быть, $\omega - \epsilon_F$. Таким образом, в соответствии с [3] фазовый переход второго рода возможен только если $\omega(k) < \epsilon_F$. В [3] указано, что в реалистической модели это условие не выполняется по крайней мере вплоть до очень больших плотностей нуклонов.

Как мы увидим, правильное выражение для частоты пионов, соответствующее уравнению Клейна – Гордона – Фока, имеет вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2(n - 2\tilde{\nu}) f^2k^2/\gamma\omega. \tag{8}$$

Поэтому методом среднего поля нельзя получить количественные результаты.

3. Эффективный лагранжиан пионного поля

Для получения правильного решения в той же физической модели нуклоны + пионное поле с волновым вектором $\mathbf{k}$ можно применить следующий метод.

Функция Лангранжа задачи имеет вид

$$L = \Sigma(w_n - E^{(n)})\Psi_n^+\Psi_n + \Sigma(w_p - E^{(p)})\Psi_p^+\Psi_p + (\omega^2 - \omega_0^2)\phi^+\phi +$$

$$+ iMk(\Psi_n\vec{\sigma}\Psi_p^+\phi^+ - \Psi_n^+\vec{\sigma}\Psi_p\phi) , \qquad (9)$$

где w_n, w_p, ω — — частоты полей. Нетрудно видеть, что вариация L по Ψ_n, Ψ_p, ϕ дает правильное уравнение движения (уравнение Шредингера для нуклонов и уравнение Клейна – Гордона – Фока для пионов). Сначала следует определить новую собственную энергию нейтронов и протонов в поле ϕ с частотой ω. Аналогично (3) получаем

$$\tilde{E}^{(n)} = E^{(n)} + \frac{\omega}{2}(1-\gamma), \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{8f^2k^2}{\omega^2}\phi^+\phi}, \qquad (10)$$

$$\tilde{E}^{(p)} = E^{(p)} + \frac{\omega}{2}(1+\gamma).$$

Подставляя в (9), находим

$$L = \Sigma(w_n - E^{(n)})\tilde{n}^+\tilde{n} + \Sigma(w_p - E^{(p)})\tilde{p}^+\tilde{p} + (\omega^2 - \omega_0^2)\phi^+\phi + (n - 2\tilde{\nu}_p) \times$$

$$\times \frac{\omega}{2}(\gamma - 1). \qquad (11)$$

Вариация (11) по $\phi^+\phi$ дает выражение (8).

Для получения энергии из лагранжиана, зависящего от частот полей (в нашем случае от w_n, w_p, ω) имеется следующее правило [4]:

$$E = w_n\frac{\partial L}{\partial w_n} + w_p\frac{\partial L}{\partial w_p} + \omega\frac{\partial L}{\partial \omega} - L . \qquad (12)$$

Из (11), (12) и (8) нетрудно получить

$$E = E_0[(1-\tilde{x})^{5/3} + \tilde{x}^{5/3}] + (3\omega^2 - \omega_0^2)\phi^+\phi .$$

Плотность "новых" мезонов (равная плотности "новых" протонов) получается из выражения

$$\tilde{\nu} = \frac{\partial L}{\partial \omega} = 2\omega\left[1 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2(\gamma+1)}\right]\phi^+\phi . \qquad (14)$$

При малой плотности $\tilde{\nu}$ эти равенства опять приводят к выражению вида (5′)

$$E = (\omega(k) - \epsilon_F)\nu .$$

Однако $\omega(k)$ должно определяться по формуле (8). Формула (8) дает частоту π^--мезонов, а при замене ω на $-\omega$ частоту π^+-мезонов [2].

Нетрудно видеть, что при $\tilde{\nu} \to 0$ при условии

$$\xi = \frac{3\sqrt{3} f^2 k^2 n}{\omega_0^3} = 1$$

сумма частот π^- и π^+-мезонов обращается в ноль, т. е. возникает неустойчивость для образования пар, упомянутая выше. Поскольку в изучаемой модели образование пар не учитывается, ее можно использовать только при $\xi < 1$.

Анализ уравнений (12), (13) и (14) при произвольной плотности $\tilde{\nu}$ показывает, что в рассматриваемой модели фазовые переходы первого и второго рода не происходят вплоть до больших плотностей ядерного вещества, т. е.

$$E(\tilde{\nu}) > E(0) .$$

В [3] было высказано предположение о возможност существовании протонных звезд ($\tilde{\nu}_p = \tilde{\nu}_\pi = n$). Таким образом, в рассмотренной модели это предположение не подтверждается. Трудно сказать сохранится ли этот результат и при более реалистическом расчете.

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
18 июля 1973 г.

Литература

[1] А.Б.Мигдал. ЖЭТФ, 61, 2209, 1971.
[2] А.Б.Мигдал. ЖЭТФ, 63,1993, 1972.
[3] A. B. Migdal. Phys. Rev. Lett., 1973 (в печати).
[4] А.Б.Мигдал, О.А.Маркин, И.Н.Мишустин. ЖЭТФ, 66, вып. 1, 1973.
[5] R.F.Sawyer. Phys. Rev. Lett., 29, 382, 1972; D.J.Scalapino. Phys. Rev. Lett., 29, 386, 1972; R.F. Sawyer, D.J.Scalapino. Phys. Rev., D7, 953, 1973; R.F.Sawyer, A.C.Yao. Phys., D7, 1579, 1973.