Письма в ЖЭТФ, том 66, вып.2, стр.85 - 90

ТЕОРИЯ ЛИУВИЛЛЯ НА Z_N-РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

С.А.Апикян[1)]

Ереванский физический институт

375036 Ереван, Армения

Поступила в редакцию 22 мая 1997 г.

После переработки 20 июня 1997 г.

Рассматривается теория поля Лиувилля на Z_N-кривой. Показано, что "Partition function" на таких поверхностях приводится к корреляционным функциям Лиувилля на сфере и к свободной скалярной теории с рамоновскими граничными условиями.

PACS: 11.25.-w

Несмотря на большой интерес к теории Лиувилля, что связано с его отношением к теории струн, остается много открытых проблем в этой области. В последние годы интерес к теории Лиувилля возобновился, в связи с появлением работ [1–3], где были построены аналитические выражения для структурных констант теории Лиувилля.

В данной работе мы интересуемся проявлением конформных свойств теории Лиувилля на римановой поверхности, обладающей Z_N-симметрией. Показано, что "Partition function" теории Лиувилля на Z_N-римановой поверхности приводится к корреляционным функциям теории Лиувилля на сфере и к корреляционным функциям полей "кручения".

Z_N-симметричные поверхности Римана $X_g^{(N)}$ рода $g \geq 1$ определяются алгебраическим уравнением вида

$$y^N(z) = \prod_{i=1}^{h}(z-\omega_i)^{n_i}, \qquad n_i > 1, \tag{1}$$

то есть $X_g^{(N)}$ является N-листным накрытием римановой сферы. Род g Z_N-римановой поверхности

$$g = (N-1)(h-2)/2 \tag{2}$$

может быть вычислен при помощи теоремы Римана – Гурвица. Поверхность Римана с симметрией Z_N имеет h комплексных параметров, поэтому пространство модулей $\mathcal{M}_{Z_N}$ имеет размерность

$$\mathrm{dim}\mathcal{M}_{Z_N} = h-3 = \frac{2g}{N-1} - 1. \tag{3}$$

Сравнивая с размерностью пространства модулей $\mathcal{M}$ римановой поверхности общего положения

$$\mathrm{dim}\mathcal{M} = \begin{cases} 1, & g=1 \\ 3g-3, & g>1 \end{cases}, \tag{4}$$

мы можем заключить, что Z_N-риманова поверхность не заполняет все римановые поверхности.

[1)] e-mail: apikyan@lx2.yerphi.am

Рассмотрим теорию Лиувилля в конформной калибровке. Лагранжевая плотность Лиувилля на поверхностях представляется в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi}(\partial_a \phi)^2 + \mu e^{2b\phi} + \frac{Q}{4\pi}\hat{R}\phi, \tag{5}$$

где b и μ являются соответственно константой связи и космологической константой. Мы зафиксировали метрику $\hat{g}$ на данной топологической поверхности с кривизной $\hat{R}$, нормированной как

$$\frac{1}{4\pi}\int \sqrt{\hat{g}}\hat{R} = 2(1-g) \tag{6}$$

на поверхности рода g.

Пронумеруем N-листы Z_N-римановой поверхности $X_g^{(N)}$ следующими номерами: $l = 0, 1, ..., N-1$, а каждый лист представим как

$$y^{(l)}(z) = \omega^l \prod_{j=1}^{h}(z - \omega_j)^{n_j/N}, \tag{7}$$

где ω – N-ый корень единицы, $\omega = e^{2\pi i/N}$.

Относительно преобразования (7) лагранжевая плотность, тензор энергии-импульса и лиувиллевское поле $(\mathcal{L}(\phi(y)), T(\phi), \phi(y))$ на Z_N-римановой поверхности $X_g^{(N)}$ переходят на ветви $\mathcal{L}^{(l)}(\phi^{(l)}(z))$, $T^{(l)}(z)$ и $\phi^{(l)}(z)$ $(l = 0, 1, ..., N-1)$. Каждая ветвь полей Лиувилля $\phi^{(l)}(z)$ преобразуется при голоморфных преобразованиях как логарифм конформного фактора метрики:

$$\phi^{(l)}(\omega, \bar{\omega}) = \phi^{(l)}(z, \bar{z}) - \frac{Q}{2}\log|\omega'(z)|^2, \tag{8}$$

где

$$Q = b + 1/b. \tag{9}$$

На каждом листе мы имеем голоморфный тензор энергии-импульса Лиувилля

$$T^{(l)}(z) = -(\partial\phi^{(l)}(z, \bar{z}))^2 + Q\partial^2\phi^{(l)}(z, \bar{z}) \tag{10}$$

с лиувиллевским центральным зарядом

$$\hat{c} = 1 + 6Q^2. \tag{11}$$

Предположим, что поля $(T^{(l)}(z), \phi^{(l)}(z, \bar{z}))$ на N-листном накрытии могут быть рассмотрены как векторные поля на CP^1. Когда аргументы полей обходят точки ветвления, векторные поля преобразуются матрицей монодромии. Матрицы монодромии образуют представление гомотопической группы $\pi_1(CP^1/\cup\omega_j)$ и в нашем случае просто совпадают с группой Z_N.

Для удобства перейдем к базису работы [4], в которой генераторы группы монодромии становятся диагональными:

$$\begin{aligned} \phi_{(k)}(z, \bar{z}) &= \textstyle\sum_{l=0}^{N-1} \omega^{-kl}\phi^{(l)}(z, \bar{z}), \\ T_{(k)}(z) &= \textstyle\sum_{l=0}^{N-1} \omega^{-kl}T^{(l)}(z). \end{aligned} \tag{12}$$

В диагональном базисе "правила бозонизации" для $T_{(k)}$ могут быть представлены следующим образом:

$$T_{(k)} = -\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1}\partial\phi_{(s)}\partial\phi_{(k-s)} + Q\partial^2\phi_{(k)}. \tag{13}$$

В частности, тензор энергии-импульса Лиувилля представляется как

$$T_{(0)} = -\frac{1}{N}\partial\phi_{(0)}\partial\phi_{(0)} + Q\partial^2\phi_{(0)} - \frac{1}{N}\sum_{s\neq 0}^{N-1}\partial\phi_{(s)}\partial\phi_{(-s)}, \tag{14}$$

а соответствующий центральный заряд есть

$$c = N(1+6Q^2). \tag{15}$$

Выражения (14), (15) делают очевидным расщепление начальной теории на теорию Лиувилля на сфере с центральным зарядом $c_s = 1 + 6Q^2N$ и на свободную скалярную теорию полей $\phi_{(s)}$ $(s = 1, 2, ..., N-1)$ с $(N-1)$-центральным зарядом $c_f = 1$. При голоморфном преобразовании координат лиувиллевское поле $\phi_{(0)} \equiv \Phi$ и свободные поля $\phi_{(k)}$ $(k \neq 0)$ преобразуется как

$$\begin{aligned} &\Phi(\omega,\bar\omega) = \Phi(z,\bar z) - \tfrac{N}{2}Q\log|\,\omega'(z)\,|^2,\\ &\phi_{(k)}(\omega,\bar\omega) = \phi_{(k)}(z,\bar z), \qquad k\neq 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Перепишем выражение (14) в новых обозначениях:

$$T = -\frac{1}{N}\partial\Phi\partial\Phi + Q\partial^2\Phi - \frac{1}{N}\sum_{s\neq 0}^{N-1}\partial\phi_{(s)}\partial\phi_{(-s)}. \tag{17}$$

В соответствие со свойствами монодромии [4] векторных полей на CP^1 мы должны определить "лиувиллевские вершинные операторы" двух видов. Первый – это так называемые "некрученные" вершинные операторы

$$V_{[0]}(z,\bar z) = \exp\{2\alpha\Phi(z,\bar z)\}\exp\{i\sum_{s\neq 0}\alpha_{(s)}\phi_{(s)}(z,\bar z)\} \tag{18}$$

с размерностью

$$\Delta_{\alpha,\beta} = 2\alpha(Q-\alpha) + \frac{N}{2}\sum_{s\neq 0}\alpha_{(s)}\alpha_{(-s)}. \tag{19}$$

Пространство физического состояния теории Лиувилля хорошо известно и определяется зарядом [5, 6]

$$\alpha = ip + Q/2. \tag{20}$$

Таким образом, окончательно для размерности "некрученных" вершинных операторов получим выражение

$$\Delta = \frac{Q^2}{2} + 2p^2 + \frac{N}{2}\sum_{s\neq 0}\alpha_{(s)}\alpha_{(-s)}. \tag{21}$$

Второй – это "крученные" лиувиллевские вершинные поля следующего вида:

$$V_{[k]}(z,\bar{z}) = \exp\{2\gamma\Phi(z,\bar{z})\}\sigma_k(z|1)\sigma_k(z|2)...\sigma_k(z|N-1) \tag{22}$$

с соответствующей размерностью [4]

$$\Delta_{[k]} = 2\gamma(Q-\gamma) + (N^2-1)/24N. \tag{23}$$

Поля "кручений" $\sigma_k(z|l)$ имеют размерности

$$\Delta_{kl} = \frac{1}{4}[\{\frac{kl}{N}\} - \{\frac{kl}{N}\}^2], \tag{24}$$

где символ $\{x\}$ обозначает фрактальную часть x.

Наша цель теперь – построить "Partition function" теории Лиувилля на поверхности $X_g^{(N)}$, используя эти знания. В соответствии с предположением Полякова [7] "суммирование" по гладкой метрике со вставленными вершинными операторами эквивалентно "суммированию" по метрике с сингулярностями в точках вставленных вершинных операторов. Поэтому "Partition function" теории Лиувилля на римановой поверхности

$$Z_g = \int D\phi \exp[-\int \frac{1}{4\pi}(\partial_a\phi)^2 + \mu e^{2b\phi} + \frac{Q}{4\pi}\hat{R}^g\phi] \tag{25}$$

может быть представлена на Z_N-римановой поверхности следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_g &= \int D\Phi \exp[-\int \tfrac{1}{4\pi N}(\partial_a\Phi)^2 + \mu e^{2b\Phi} + \tfrac{Q}{4\pi}\hat{R}^{g=0}\Phi]\times \\ &\times \prod_{s\neq 0} D\phi_{(s)} \exp[-\int \tfrac{1}{4\pi N}\sum_{s\neq 0}\partial\phi_{(s)}\partial\phi_{(-s)}]\times \\ &\times \prod_{i=1}^{h} \exp\{2\gamma_i\Phi(\omega_i,\bar{\omega}_i)\}\sigma_{k_i}(\omega_i|1)\sigma_{k_i}(\omega_i|2)...\sigma_{k_i}(\omega_i|N-1), \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$b = \frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{1}{2}}. \tag{27}$$

Для того чтобы вычислить последний "Partition function", проинтегрируем сначала по нулевым модам лиувиллевских полей Φ. После интегрирования по нулевым модам мы получим (в переменных полей, ортогональных к нулевым модам [8])

$$\begin{aligned} Z_g &= (-\mu)^s \tfrac{\Gamma(-s)}{b}\times \\ &\times \int D\tilde{\Phi} \exp[-\int \tfrac{1}{4\pi N}(\partial\tilde{\Phi})^2 + \tfrac{Q}{4\pi}\hat{R}^{g=0}\tilde{\Phi}](\int e^{2b\tilde{\Phi}})^s \prod_{i=1}^{h}\exp\{2\gamma_i\tilde{\Phi}(\omega_i,\bar{\omega}_i)\}\times \\ &\times \int \prod_{s\neq 0} D\phi_{(s)} \exp[-\int \tfrac{1}{4\pi N}\sum_{s\neq 0}\partial\phi_{(s)}\partial\phi_{(-s)}]\times \\ &\times \prod_{i=1}^{h}\sigma_{k_i}(\omega_i|1)\sigma_{k_i}(\omega_i|2)...\sigma_{k_i}(\omega_i|N-1), \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\sum_{i=1}^{h} \gamma_i = Q - sb. \tag{29}$$

Последнее интегральное выражение (корреляционная функция) полей σ_k в (28) определяется как

$$< \prod_{i=1}^{h} \sigma_{k_i}(\omega_i|1)\sigma_{k_i}(\omega_i|2)...\sigma_{k_i}(\omega_i|N-1) >= \prod | \omega_i - \omega_j |^{-2\gamma_{ij}} (\det\hat{W})^{-1/2}, \tag{30}$$

где $\hat{W}$ – матрица периодов, а γ_{ij} образует базис в $H_1(X_g^{(N)}, Z)$ [9]. Кроме того, хорошо известно, что многоточечный коррелятор (30) приводится к "Partition function" свободной скалярной теории с рамоновскими граничными условиями [10].

Первый интеграл (корреляционная функция) в (28) не является коррелятором свободных полей, поскольку в общем случае степень s не является положительной и целочисленной. Но если s принимает целые значения $s = n = 0, 1, 2, ...$ то "Partition function" Z_g имеет полюсы по $\sum \gamma_i$ с вычетами, совпадающими с соответствующими пертурбативными интегралами

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{\sum \gamma_i = Q - nb} Z_g(\omega_1, ..., \omega_h) = G^{(n)}(\omega_1, ..., \omega_h)\Big|_{\sum \gamma_i = Q - nb}, \tag{31}$$

где $G^{(n)}$ – коррелятор свободных полей:

$$\begin{aligned} G^{(n)} &= \tfrac{(-\mu)^n}{n!} \int D\Phi \exp\{-\int \tfrac{1}{4\pi N}(\partial\Phi)^2 + Q\hat{R}^{g=0}\Phi\}\times \\ &\times \prod_{j=1}^{n} \int \sqrt{\hat{g}} \exp\{2b\Phi(x_j)\} d^2x_j \prod_{i=1}^{h} \exp\{2\gamma_i \Phi(\omega_i, \bar{\omega}_i)\}\times \\ &\times \int \prod_{s\neq 0} D\phi_{(s)} \exp[-\tfrac{1}{4\pi N} \int \textstyle\sum_{s\neq 0} \partial\phi_{(s)} \partial\phi_{(-s)}]\times \\ &\times \prod_{i=1}^{h} \sigma_{k_i}(\omega_i|1)\sigma_{k_i}(\omega_i|2)...\sigma_{k_i}(\omega_i|N-1), \end{aligned} \tag{32}$$

который является n-ым членом в наивном разложении (26) для Z_g по степеням μ. Итак, "Partition function" теории Лиувилля на Z_N-римановой поверхности приводится к корреляционной функции Лиувилля на сфере с вставленными вершинными операторами Лиувилля (с зарядами γ_i) и корреляционной функции полей "кручения" [11]. Поэтому вычеты "Partition function" теории Лиувилля на Z_N-римановой поверхности в полюсах $\sum \gamma_i = Q - nb$ совпадают с корреляционной функцией теории свободных полей на Z_N-римановой поверхности.

Рассмотрим частный случай, когда мы имеем теорию Лиувилля на эллиптической кривой, то есть $N = 2$, $h = 4$. Перепишем (26) в этом частном случае

$$
\begin{aligned}
&Z_1 = \int D\Phi \exp[-\int \tfrac{1}{8\pi}(\partial_a\Phi)^2 + \mu e^{2b\Phi} + \tfrac{Q}{4\pi}\hat{R}^{g=0}\Phi]\times \\
&\times D\phi \exp[-\int \tfrac{1}{8\pi}\partial\phi\partial\phi]\times \qquad (33)\\
&\times \prod_{i=1}^{4} e^{2\gamma_i\Phi(\omega_i,\bar{\omega}_i)}\sigma_{\epsilon_i}(\omega_i,\bar{\omega}_i),
\end{aligned}
$$

тогда вычет Z_1 будет эквивалентным к четырехточечной функции

$$
\operatorname*{Res}_{\sum\gamma_i=Q-nb} Z_1(\omega_1,...,\omega_4) = G^{(n)}(\omega_1,...,\omega_4)\Big|_{\sum\gamma_i=Q-nb} \qquad (34)
$$

где $G^{(n)}$ имеет форму

$$
\begin{aligned}
&G^{(n)}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) = \tfrac{(-\mu)^n}{n!}\int D\Phi e^{-\int \frac{1}{8\pi}(\partial\Phi)^2+Q\hat{R}^{g=0}\Phi}\times \\
&\times \prod_{j=1}^{n}\int\sqrt{g}e^{2b\Phi(x_j)}d^2x_j \prod_{i=1}^{h} e^{2\gamma_i\Phi(\omega_i,\bar{\omega}_i)}\times \\
&\times \int_{\phi\in S^1} D\phi \exp[-\tfrac{1}{8\pi}\int\partial\phi\partial\phi]\times \qquad (35)\\
&\times \prod_{i=1}^{4}\sigma_{\epsilon_i}(\omega_i,\bar{\omega}_i)
\end{aligned}
$$

Следовательно, "Partition function" Лиувилля на эллиптической кривой приводится к четырехточечной корреляционной функции на сфере лиувиллевских вершинных операторов и к "Partition function" свободной скалярной теории, где интегрирование идет по компактифицированным полям с рамоновскими граничными условиями.

---

1. H.Dorn and H.Otto. Phys. Lett. **B291**, 39 (1992).
2. H.Dorn and H.Otto. Nucl. Phys. **B429**, 375 (1994).
3. A.B.Zamolodchikov and Al.B.Zamolodchikov, hep-th/9506136.
4. S.A.Apikyan and C.Efthimiou, hep-th/9610051.
5. T.Curtright and C.Thorn, Phys. Rev. Lett. **48**, 1309 (1982); E.Braaten, T.Curtright, and C.Thorn, Phys. Lett. **B118**, 115 (1982); Ann. Phys. **147**, 365 (1983).
6. J.Gervais and A.Neveu, Nucl. Phys. **B238**, 125 (1984); **B238**, 396 (1984), **B257**, [FS14], 59 (1985).
7. L.Takhtajan, Semi-clasical Liouville theory. Complex geometry of moduli space, and uniformization of Riemann surface, in *New Symmetry Principles in Quantum Field Theory*, Ed. J.Frolich et al Plenum Press, 1992.
8. M.Goulian and M.Li, Phys. Rev. Lett. **66**, 2051 (1991).
9. M.Bershadsky and A.Radul, Int. Mod. Phys. **A2**, 165 (1987).
10. V.Knizhnik, Commun. Math. Phys. **112**, 567 (1987).
11. Al.B.Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B285**, [FS19], 481 (1987); L.Dixon, D.Friedan, E.Martinec, and S.Shenker, Nucl. Phys. **B282**, 13 (1987). C.Crnkovic, G.Sotkov, and M.Stanishkov, Phys. Lett. **B220** 397 (1989); S.A.Apikyan and C.J.Efthimiou, Phys. Lett. **B359**, 313 (1995). S.A.Apikyan and Al.B.Zamolodchikov, ZhETF **92**, 34 (1987).