

## КОНДЕНСАЦИЯ БОЗЕ – ЭЙНШТЕЙНА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЛОВУШКЕ

В.А.Алексеев<sup>1)</sup>, В.В.Климов<sup>2)</sup>, Д.Д.Крылова

Физический институт им.П.Н.Лебедева, РАН, 117924 Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 июля 1997 г.

После переработки 15 сентября 1997 г.

Найдена зависящая от температуры функция распределения по скоростям при конденсации Бозе – Эйнштейна конечного числа невзаимодействующих атомов, захваченных в трехмерную анизотропную параболическую ловушку. Показано, что при температуре  $T$  порядка температуры конденсации  $T_0$  скоростное распределение складывается из анизотропной части, отражающей заселенность основного состояния, и изотропной надконденсатной части.

PACS: 05.30.Jр

Во всех выполненных за последние два года экспериментах по достижению конденсированного состояния нейтрального бозе-газа удержание атомов осуществлялось в ловушках различной конфигурации [1–3], причем критерием конденсации служило возникновение анизотропии в распределении частиц по скоростям [1]. Тем не менее, факт возникновения этой анизотропии до настоящего времени не обоснован квантовомеханическим расчетом. В настоящей статье использовано точное квантовое описание осцилляторного движения для вычисления одночастичной функции распределения по скоростям  $W(\mathbf{v})$  идеального газа, удерживаемого потенциалом  $V(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{m\omega_i^2 x_i^2}{2}$  ( $T$  – температура,  $m$  – масса атомов), который хорошо аппроксимирует любую реальную ловушку.

Химический потенциал газа  $\bar{\mu} = \mu/T$  определяется уравнением

$$N = \sum_{k_x, k_y, k_z=0} (e^{\beta \mathbf{k} - \bar{\mu}} - 1)^{-1}, \quad (1)$$

где  $N$  – полное число частиц,  $\beta_i = \hbar\omega_i/T$ ,  $i = x, y, z$ ; энергия осцилляторов отсчитывается от значения  $2^{-1}\hbar(\omega_x + \omega_y + \omega_z)$ . Представив каждый член суммы в (1) в виде

$$(e^{\beta \mathbf{k} - \bar{\mu}} - 1)^{-1} = \sum_{s=1}^{\infty} \exp(s(-\beta \mathbf{k} + \bar{\mu})) \quad (2)$$

и выполнив суммирование по  $k_i$ , получим

$$N = \sum_{s=1}^{\infty} e^{\bar{\mu}s} \prod_{i=1}^3 (1 - e^{-\beta_i s})^{-1}. \quad (3)$$

В [4] сумма (3) записана в интегральной форме, позволяющей исследовать все предельные случаи. Для вычисления функции распределения по скоростям нам необходимо получить асимптотические выражения для химического потенциала непосредственно из (3). Соотношение (3) удобно переписать в виде

$$N = \sum_{s=1}^{\infty} e^{\bar{\mu}s} + \sum_{s=1}^{\infty} e^{\bar{\mu}s} \left( \prod_{i=1}^3 (1 - e^{-\beta_i s})^{-1} - 1 \right). \quad (4)$$

<sup>1)</sup> e-mail: valeks@sci.lebedev.ru

<sup>2)</sup> e-mail: klimov@rim.phys.msu.su

При этом первая сумма равна числу частиц в основном состоянии  $N_0 = (e^{-\bar{\mu}} - 1)^{-1}$ , а вторая – числу частиц в возбужденных состояниях и остается сходящейся и после отбрасывания множителя  $e^{\bar{\mu}s}$ . При больших  $\beta \gg 1$  (низкие температуры) из (4) получаем

$$N = (e^{-\bar{\mu}} - 1)^{-1} + \sum_i \exp(-\beta_i), \quad \bar{\mu} \approx -\frac{1}{N}, \quad N_0 \approx N. \quad (5)$$

С ростом  $T$  величины  $\beta_i$  уменьшаются. При малых  $\beta \ll 1$  (4) можно записать в виде

$$N = \frac{1}{e^{-\bar{\mu}} - 1} + \frac{1}{\beta_x \beta_y \beta_z} \sum_{s=1}^{\infty} e^{\bar{\mu}s} \frac{1}{s^3}, \quad \beta \ll 1, \quad (6)$$

причем (6) применимо как при малых, так и при больших значениях  $|\bar{\mu}|$ . При малых  $|\bar{\mu}|$  из (6) находим

$$N = -\frac{1}{\bar{\mu}} + \left(\frac{T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3, \quad |\bar{\mu}| = N^{-1} \left(1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^3\right)^{-1}, \quad |\bar{\mu}| \ll 1, \quad (7)$$

где  $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z / \zeta(3))^{1/3}$ ,  $\zeta(x)$  – дзета-функция Римана,  $\zeta(3) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^3} \approx 1.2$  и по аналогии с квазиклассическим приближением [5] введена температура конденсации  $T_0 = N^{1/3} \hbar\bar{\omega}$ . Это выражение дает также (см. (5)) правильное значение  $\bar{\mu} = -1/N$  при  $T \rightarrow 0$ , но не обеспечивает правильного стремления  $\bar{\mu}$  к этому пределу. Из (7) видно, что абсолютная величина  $|\bar{\mu}|$  становится много меньше единицы при выполнении условия  $N(\hbar\bar{\omega}/T)^3 = (T_0/T)^3 \gg 1$ , которое при достаточно большом  $N$  достигается в случае  $\hbar\bar{\omega}/T \ll 1$ , то есть в области применимости (6). С дальнейшим ростом температуры  $|\bar{\mu}|$  растет и при  $|\bar{\mu}| \gg 1$  из (6) получаем для  $\bar{\mu}$  выражение

$$N = e^{\bar{\mu}} \left(\frac{T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \zeta^{-1}(3), \quad \bar{\mu} = -\ln \left(\frac{1}{\zeta(3)} \left(\frac{T}{T_0}\right)^3\right), \quad (8)$$

применимое при высоких температурах  $N(\hbar\bar{\omega}/T)^3 = (T_0/T)^3 \ll 1$ . При этом заселенность основного состояния убывает с ростом температуры:  $N_0 = \zeta(3)(T_0/T)^3$ . На рис. 1 показана зависимость от температуры величины  $|\bar{\mu}|$  и  $N_0$  в случае потенциала, использованного в [1], полученная по формулам (7) и (8), и результаты численного решения (1). Отличие (7) от (5) на рисунке не ощутимо.

Для нахождения функции распределения частиц по скоростям  $W(\vec{v})$  рассмотрим диагональный матричный элемент оператора  $F = \sum_{\alpha} \delta(\nu - \nu_{\alpha})$  (суммирование по частицам) по волновой функции в  $\vec{v} = \mathbf{p}/m$ -представлении с числами заполнения  $N_0 N_1 \dots N_q$  [6]:

$$\langle N_0 N_1 \dots | F | N_0 N_1 \dots \rangle = N_0 |\Psi_0(\vec{v})|^2 + N_1 |\Psi_1(\vec{v})|^2 + \dots$$

Функция распределения по скоростям получается при домножении этой величины на вероятность  $\sigma(N_0 N_1 \dots) = Z \exp(-(\epsilon_0 N_0 + \epsilon_1 N_1 + \dots)/T)$  ( $Z$  – статистическая сумма,  $\epsilon_i$  – энергия  $i$ -го состояния) нахождения в состоянии  $|N_0 N_1 \dots\rangle$  и суммировании по всем возможным значениям  $N_0, N_1, \dots$  при условии  $N_0 + N_1 + \dots = N$  [7]:

$$W(\vec{v}) = \sum_{N_0 N_1 \dots} \sigma(N_0 N_1 \dots) [N_0 |\Psi_0(\vec{v})|^2 + N_1 |\Psi_1(\vec{v})|^2 + \dots] = \sum_n \langle N_n \rangle |\Psi_n(\vec{v})|^2, \quad (9)$$

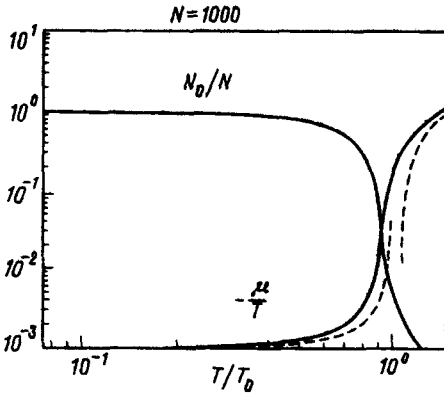


Рис.1. Зависимость химического потенциала  $-\mu/T$  от температуры, пунктирные кривые – асимптотики (7) и (8) ( $N = 1000$ ,  $\omega_x : \omega_y : \omega_z = 1 : 1 : 2\sqrt{2}$ )

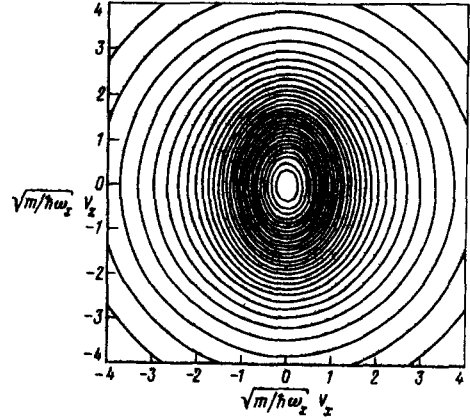


Рис.2. Изолинии одночастичной функции распределения (17) вблизи точки перехода ( $N = 1000$ ,  $\omega_x : \omega_y : \omega_z = 1 : 1 : 2\sqrt{2}$ ,  $T = 1.16T_0$ )

где  $\langle N_n \rangle$  – среднее число частиц на уровне  $n$ ,  $\langle N_n \rangle = (\exp((\epsilon_n - \mu)/T) - 1)^{-1}$ . Далее, используя (2), из (9) получим:

$$W(\mathbf{p}) = \sum_{s=1}^{\infty} e^{s\mu} \tilde{G}(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \eta s). \quad (10)$$

Здесь  $\eta = 1/T$ , а  $\tilde{G}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \eta s)$  – функция Грина (функция точечного мгновенного источника [8]) в импульсном представлении:

$$\tilde{G}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \eta) = \sum_n e^{-E_n \eta} \Psi_n(\mathbf{p}) \Psi_n(\mathbf{p}'), \quad (11)$$

которую можно получить преобразованием Фурье из функции Грина в координатном представлении

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \eta) = \sum_n e^{-E_n \eta} \Psi_n(\mathbf{r}) \Psi_n(\mathbf{r}'), \quad \hat{H} \Psi_n(\mathbf{r}) = E_n \Psi_n(\mathbf{r}), \quad (12)$$

удовлетворяющей уравнению Шредингера с мнимым временем:

$$\frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \eta - \eta')}{\partial \eta} + \hat{H} \tilde{G} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\eta - \eta'). \quad (13)$$

В случае осциллятора  $\epsilon_n/T = \epsilon_{\mathbf{k}}/T = \beta \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}$ , и из (9) получаем

$$W(\vec{\nu}) = \sum_{k_x, k_y, k_z=0}^{\infty} (e^{\beta \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}} - 1)^{-1} \Psi_{k_x}^2(\nu_x) \Psi_{k_y}^2(\nu_y) \Psi_{k_z}^2(\nu_z), \quad (14)$$

где

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\nu) = \left( \frac{\sqrt{q_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{\pi 2^n n!}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} q_{\mathbf{k}} \nu^2\right) H_{\mathbf{k}}(\sqrt{q_{\mathbf{k}}} \nu), \quad q_{\mathbf{k}} = \frac{m}{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}.$$

Снова используя (2), выполняем суммирование по индексам  $k_i$  и находим

$$W(\vec{\nu}) = \sum_{s=1}^{\infty} e^{s\mu} \prod_{i=1}^3 G(\nu_i, q_i, \beta, s), \quad (15)$$

где  $G$  – функция Блоха [7]:

$$G(\nu, q, \beta) = \sqrt{\frac{q}{\pi}} (1 - e^{-2\beta})^{-1/2} \exp\left(-q\nu^2 \operatorname{th} \frac{\beta}{2}\right),$$

причем, как видно из (3),  $\int W(\vec{\nu}) d\vec{\nu} = N$ .

При  $\beta_i \gg 1$  из (5) получаем  $\bar{\mu} = -1/N$  и (15) принимает вид

$$W(\vec{\nu}) = N \Psi_0^2(\vec{\nu}) = N \prod_{i=1}^3 \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar \omega_i}} \exp\left(-\frac{m\nu_i^2}{\hbar \omega_i}\right), \quad (16)$$

отражающий тот факт, что все частицы находятся в основном состоянии. Если частоты  $\omega_i$  разные, эта функция анизотропна. При высоких температурах, когда  $|\bar{\mu}| \gg 1$  и  $\beta_i = \hbar \omega_i / T \ll 1$ , из (14), (15) следует изотропное максвелловское распределение, соответствующее температуре  $T$ .

Наиболее интересна переходная область, когда все еще выполняется условие  $\beta \ll 1$ , однако  $|\bar{\mu}|$  становится малой величиной:  $|\bar{\mu}| \ll 1$ . Как видно из (7), это выполняется, например, при  $\bar{\mu} = -2/N$  и  $\beta_i = \beta = (N/2.4)^{-1/3}$ , так что при  $N = 2400$ ,  $\beta = \hbar \bar{\omega} / kT = 0.1$  (отметим, что в этом случае  $\bar{\mu} \ll \beta$ ). Для исследования этого случая (15) удобно переписать в виде

$$W(\vec{\nu}) = \frac{\Psi_0^2(\vec{\nu})}{e^{-\bar{\mu}} - 1} + \sum_{s=1}^{\infty} e^{\bar{\mu}s} \left( \prod_{i=1}^{\infty} G(\nu_i, q_i, \beta_i, s) - \Psi_0^2(\vec{\nu}) \right), \quad (17)$$

при котором ряд по  $s$  сходится и после отбрасывания множителя  $e^{\bar{\mu}s}$ . Отметим, что в случае приведенного выше примера каждому из слагаемых в (17) соответствует половина полного числа частиц. Разлагая экспоненты  $e^{-\beta_i s}$  в аргументах  $G$  и отбрасывая во втором слагаемом дающую малый вклад функцию  $\Psi_0^2(\vec{\nu})$ , получаем

$$W(\vec{\nu}) = -\frac{\Psi_0^2(\vec{\nu})}{\bar{\mu}} + L(\vec{\nu}), \quad L(\vec{\nu}) = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{3/2} \frac{T^{3/2}}{\hbar^3 \bar{\omega}^3 \zeta(3)} \sum_{s=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m\bar{\nu}^2}{2T} s\right) \frac{1}{s^{3/2}}. \quad (18)$$

В отличие от  $\Psi_0^2(\vec{\nu})$ , распределение  $L(\vec{\nu})$  всегда сферически симметрично и, как было указано в [1], наличие двух этих слагаемых является главным свидетельством достижения конденсации Бозе–Эйнштейна. Сумму в (18) можно представить в виде

$$\sum_{s=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m\nu^2}{2T} s\right) \frac{1}{s^{3/2}} = \exp\left(-\frac{m\nu^2}{2T}\right) \varphi\left(\frac{m\nu^2}{2T}\right), \quad \varphi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t} dt}{e^t - e^{-\xi}}. \quad (19)$$

Функция  $\varphi(\xi)$  убывает с ростом  $\xi$  от значения  $\varphi(0) = \zeta(3/2) \approx 2.6$  до значения  $\varphi(\infty) = 1$ ; интересно, что  $\varphi'(0) = \infty$ . Отсюда следует, что  $L(\vec{\nu})$  имеет характерную ширину  $\nu \sim \sqrt{T/m} = \sqrt{\hbar \bar{\omega} / \beta m} \gg \sqrt{\hbar \bar{\omega} / m}$ , где  $\sqrt{\hbar \bar{\omega} / m}$  – ширина функции  $\Psi_0^2(\vec{\nu})$ , и неярко выраженный пик при  $\nu = 0$ . На рис. 2, 3 показаны изолинии и трехмерный вид функции распределения (17) вблизи точки перехода, откуда хорошо видны как анизотропная часть (в центре), так и изотропная часть (периферия).

Проинтегрировав (18) по скоростям, получим соотношение (7), что служит подтверждением корректности проведенной процедуры.

Напомним, что (7) и (18) применимы при выполнении, вообще говоря, противоречивых условий  $|\bar{\mu}| \ll 1$ ,  $N(T/T_0)^3 \sim 1/\beta^3 \gg 1$ . Из (7), однако, видно, что при больших  $N \sim 10^3$ ,  $|\bar{\mu}|$  остается малой величиной вплоть до очень больших значений  $N(T/T_0)^3$ ; например,  $|\bar{\mu}| < 0.1$  до значений  $(T/T_0)^3 < 1 - 10/N \approx 1$ . Это означает, что процесс конденсации происходит следующим образом (см. рис.1). При  $(T/T_0)^3 > 1$

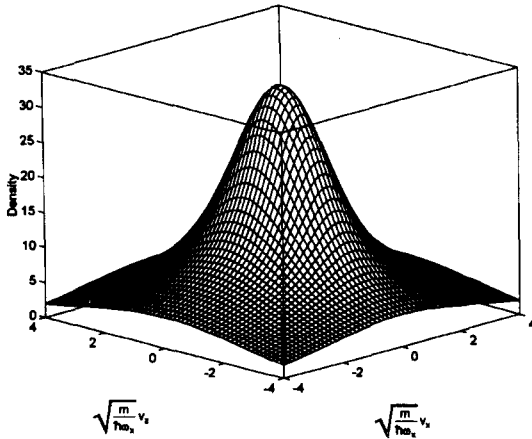


Рис.3. Трехмерный вид одночастичной функции распределения (17) вблизи точки перехода ( $N = 1000$ ,  $\omega_x : \omega_y : \omega_z = 1 : 1 : 2\sqrt{2}$ ,  $T = 1.16T_0$ )

величина  $|\bar{\mu}| > 1$  и из (14), (15) получается обычное максвелловское распределение. С уменьшением температуры при  $1/N < (T/T_0)^3 < 1$  начинается конденсация (формула (18)). При этом число конденсированных частиц  $s$ , вообще говоря, анизотропной функцией распределения  $\Psi_0^2(\vec{v})$  равно  $N(1 - (T/T_0)^3)$ , тогда как в обычной фракции с широким распределением находится  $N(T/T_0)^3$  частиц. Процесс этот длится, например, до значения  $N(T/T_0)^3 = 10$ , когда в сконденсированной фракции находится уже  $N - 10$  частиц. С дальнейшим уменьшением температуры  $N(T/T_0)^3 \leq 1$  в соответствии с (5) процесс конденсации ускоряется и все частицы попадают на нижний осцилляторный уровень с функцией распределения  $\Psi_0^2(\vec{v})$ .

Если температуру  $T_0$  выразить через объем  $V$ , занимаемый газом,  $m\omega^2 x^2 \sim T_0$ ,  $V \sim x^3 \sim \frac{1}{\omega^3} \left(\frac{T_0}{m}\right)^{3/2}$ , она с точностью до численного коэффициента совпадает с температурой  $T_0$  для газа свободных частиц [9].

Работа частично поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований 96-02-18695, 96-02-19753 (В.В.К.), ГНТП "Метрология".

1. M.H.Anderson, J.R.Ensher, M.R.Matthews et al., Science **269**, 198 (1995).
2. C.C.Bradley, C.A.Sackett, J.J.Tolett et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
3. K.B.Davis, M.-O.Mewes, M.R.Andrews et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
4. K.Kirsten and D.J.Toms, Phys. Rev. A **54**, 4188 (1996).
5. V.Bagnato, D.E.Pritchard, and D.Kleppner, Phys. Rev. A **35**, 4354 (1987).
6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лившиц, *Квантовая механика*, М.: Наука, 1989.
7. М.А.Леонтович, *Введение в термодинамику. Статистическая физика*, М.: Наука, 1983.
8. Р.Фейнман, *Статистическая механика*, М.: Мир, 1978.
9. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Статистическая физика, часть 1*, М.: Наука, 1995.