Письма в ЖЭТФ, том 66, вып.10, стр.649 - 654

НОВАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМ МЕЗОСКОПИЧЕСКИХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТОВ

А.И.Белоусов, Ю.Е.Лозовик[1)]

Институт спектроскопии РАН

142092 Троицк, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 20 октября 1997 г.

Квантовые флуктуации фаз параметра порядка в двумерных массивах джозефсоновских мезоскопических переходов и их влияние на разрушение сверхпроводимости системы исследуются при помощи модели "квантовых косинусов", свободной от некорректного использования "оператора фазы". Предложенная модель использует тригонометрические операторы фазы и позволяет рассматривать массивы столь малых сверхпроводящих гранул, пор со сверхтекучим гелием либо джозефсоновских контактов, среднее число частиц n_0 в которых (эффективных бозонов, атомов He и.т.п.) мало́ и стандартный подход, использующий операторы фазы и числа частиц как сопряженные, неприменим. Существенное отличие фазовых диаграмм массивов макроскопических и мезоскопических объектов имеет место при $n_0 < 5$ и $U < J$ (U – характерная энергия взаимодействия частиц на грануле, J – константа джозефсоновской связи). Обсуждаются явления возвратной сверхпроводимости.

PACS: 02.70.Lg; 05.30.Jp; 74.25.Dw; 74.50.+r

Развитие методов микролитографии к настоящему времени позволило создавать регулярные массивы мельчайших металлических гранул, джозефсоновских контактов и.т.д. Изучение свойств таких объектов интересно не только с фундаментальной точки зрения, но также в связи с их возможным применением в наноэлектронике. Поэтому исследованию моделей, отражающих основные свойства мезоскопических джозефсоновских массивов, уделяется в настоящее время большое внимание (см. работы [1–9] и цитируемую в них литературу).

Мезоскопической мы называем здесь гранулу либо пору со сверхтекучим He, в которой среднеквадратичные флуктуации числа эффективных бозонов – "куперовских пар" (атомов He в поре) сравнимы со средним числом частиц. При этом мы отвлекаемся от вопроса о характере перехода отдельной гранулы в сверхпроводящее (или гелия в поре в сверхтекучее) состояние, считая, что этот переход (или кроссовер) уже имел место при некоторой более высокой температуре T_{c_0} и употребляемое нами далее понятие эффективного бозона (частицы) определено. Отметим в этой связи лишь, что, как и для спаривания нуклонов в ядрах, строго говоря, не существует критического размера гранул, при которых возможно спаривание (но существенна, например, четность числа электронов, характер заполнения уровней и.т.п.). Изложение в дальнейшем будем проводить на примере массива мезоскопических сверхпроводящих гранул, но возможность обобщения на случай сверхтекучего гелия в пористой среде очевидна.

В настоящей работе мы покажем, что применение обычно использующихся при описании подобных систем (в рамках квантовой XY-модели) операторов фазы и числа частиц как сопряженных переменных [1] ограничено случаем системы *макроскопических* гранул, тогда как при малом среднем количестве частиц на гранулу необходимы другие модели, не использующие некорректного "оператора фазы" (см.

1) e-mail:lozovik@isan.troitsk.ru

ниже). Недавно для исследования сверхпроводящих свойств массива мезоскопических гранул применялась бозонная модель Хаббарда [7, 8], учитывающая не только квантовые флуктуации фаз, но также и модуля сверхпроводящего параметра порядка. Однако интересно рассмотреть систему, в которой флуктуации локальной сверхтекучей плотности на гранулах малы даже в мезоскопической области, а основная роль в разрушении глобального сверхпроводящего состояния массива принадлежит квантовым флуктуациям фаз параметра порядка.

При температурах, меньших температуры T_{c_0} установления сверхпроводимости в отдельной грануле, состояние рассматриваемой системы определяется двумя параметрами [8, 10]: a) соотношением характерной энергии кулоновского взаимодействия частиц $E_C \sim U/2$ на грануле собственной емкости $C_0 = 4e^2/U$ (взаимные емкости считаются здесь много большими C_0 и их вкладом пренебрегается) и энергии джозефсоновского туннелирования частиц между гранулами $E_J \sim J$; соответствующий безразмерный квантовый параметр есть $q \equiv \sqrt{U/J}$; b) безразмерной температурой системы $T \equiv k_b T/J$.

1. Сверхпроводящие свойства массива "макроскопических" сверхпроводящих гранул традиционно исследовались в рамках квантовой XY-модели с гамильтонианом

$$\hat{H}_{XY} = J \sum_{<i,j>} (1 - \cos(\hat{\varphi}_i - \hat{\varphi}_j)) + \frac{U}{2} \sum_i (\hat{n}_i - n_0)^2, \tag{1}$$

где сумма $\sum_{<i,j>}$ в (1) берется по всем неповторяющимся парам $< i, j >$ соседних узлов решетки. Фазы параметра порядка $\varphi_i \in [0, 2\pi)$, а оператор числа частиц $\hat{n}_i$ на грануле i полагается, начиная с работы Андерсона [1], сопряженным "оператору фазы" $\hat{\varphi}_i$: $\hat{n}_i - n_0 = \jmath\partial/\partial\varphi_i$. Отметим, что непосредственное использование такого "оператора фазы" $\hat{\varphi}$, строго говоря, некорректно хотя бы потому, что его действие выводит состояния из рассматриваемой области определения (множества периодических функций $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$). Более того, непосредственное квантование параметра порядка как $\psi = \Delta e^{\jmath\varphi} \to \hat{a} = \sqrt{\hat{n}}\hat{e}^{\jmath\varphi}$ дает, с учетом ограниченности спектра оператора числа частиц $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, неунитарный оператор $\hat{e}^{\jmath\varphi}$. Это не позволяет ввести эрмитов оператор фазы и приводит к многочисленным парадоксам [11].

Обойти большую часть подобных затруднений можно, рассматривая "тригонометрические" операторы $\widehat{\cos}\,\varphi$ и $\widehat{\sin}\,\varphi$ (не коммутирующие друг с другом), оставляя сам оператор фазы $\hat{\varphi}$ неопределенным [12]. Следуя этому подходу, все операторы физических величин, являющиеся периодическими функциями фазы (в терминах квантовой XY-модели), необходимо переписать в виде сумм тригонометрических функций, а затем сделать замену

$$\cos(\varphi) \to \widehat{\cos}\,\varphi = \frac{1}{2}\left(\hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}} + \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}}\hat{a}\right),$$

$$\sin(\varphi) \to \widehat{\sin}\,\varphi = \frac{\jmath}{2}\left(\hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}} - \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}}\hat{a}\right),$$

где операторы $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$ – бозевские операторы рождения и уничтожения частиц, $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$. С увеличением n_0, когда среднеквадратичные флуктуации числа частиц на грануле делаются много меньшими их среднего значения, ограниченность спектра оператора $\hat{n}$ становится несущественной и введенные выше "квантовые тригонометрические операторы" $\widehat{\cos}\,\varphi$ и $\widehat{\sin}\,\varphi$ переходят к своему квазиклассическому пределу $\cos(\varphi)$ и $\sin(\varphi)$.

Применяя изложенную процедуру к гамильтониану (1) рассматриваемой системы, имеем:

$$\hat{H} = J \sum_{<i,j>} \left(1 - \widehat{\cos}\,\varphi_i \widehat{\cos}\,\varphi_j - \widehat{\sin}\,\varphi_i \widehat{\sin}\,\varphi_i\right) + \frac{U}{2} \sum_i (\hat{n}_i - n_0)^2 . \qquad (2)$$

Модель (2) будем в дальнейшем для краткости называть *моделью квантовых косинусов.*

В данной работе мы интересуемся системой (2) при *целочисленном* заполнении, когда среднее число бозонов на каждой грануле $n_0 = \langle a_i^\dagger a_i \rangle$ – *целое.* Можно показать (рассмотрение этого вопроса в случае бозонной модели Хаббарда см. в работах [5]), что при этом условии и $T = 0$ модель (2) лежит в том же классе универсальности, что и квантовая XY-модель (1). Однако при *конечных* температурах критическое поведение модели квантовых косинусов будет совпадать – в отличие от системы при нулевой температуре – с критическим поведением квантовой XY-модели в некоторой *конечной* области изменения среднего числа заполнения n_0 гранул системы (в окрестности целочисленных значений n_0).

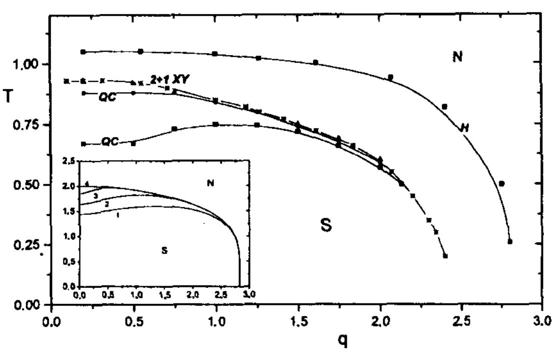

Рис.1. Фазовые диаграммы модели квантовых косинусов QC бозонной модели Хаббарда H [8] и квантовой XY-модели 2+1 XY [17] (S – сверхпроводящее состояние, N – нормальное состояние). На вставке показаны результаты расчета по теории среднего поля [15]: *1* – $n_0 = 1$; *2* – $n_0 = 2$; *3* – $n_0 = 6$; *4* – квантовая XY-модель ($n_0 = \infty$); здесь и далее символы обозначают результаты квантовых расчетов Монте-Карло: незакрашенные – $N = 10$, закрашенные – $N = 6$; квадраты – $n_0 = 1$, кружки – $n_0 = 3$, треугольники – $n_0 = 5$, ромбы – $n_0 = 7$, звездочки – квантовая XY-модель

2. Для расчета свойств системы (2) на плоскости управляющих параметров $\{q, T\}$ применялся квантовый метод Монте-Карло интегрирования по траекториям в модификации "шахматная доска" [13], когда степенями свободы дискретизованной системы являются числа заполнения $\{n_i^p\}$ узлов трехмерной решетки $N \times N \times 4P$, образованной $4P$ – кратным размножением исходной $N \times N$ вдоль оси "мнимого времени".

Основное внимание при анализе сверхпроводящих свойств массива было уделено анализу доли сверхтекучей компоненты(аналогу "helicity modulus" квантовой XY-модели, см. [14]), выражение для которой в терминах модели квантовых косинусов (2) имеет вид

$$\nu_s = -\frac{1}{N^2}\left\langle \hat{T}_x \right\rangle - \frac{1}{N^2TP} \sum_{\tau=0}^{P-1} \left\langle \hat{J}_x^{(p)}(\tau) \hat{J}_x^{(p)}(0) \right\rangle , \qquad (3)$$

$$\hat{T}_x = -\sum_i \left(\widehat{\cos}\,\varphi_{i+x} \widehat{\cos}\,\varphi_i + \widehat{\sin}\,\varphi_{i+x} \widehat{\sin}\,\varphi_i\right),$$

$$\hat{J}_x^{(p)} = \sum_i \left(\widehat{\sin}\,\varphi_{i+x} \widehat{\cos}\,\varphi_i - \widehat{\cos}\,\varphi_{i+x} \widehat{\sin}\,\varphi_i\right), \qquad \hat{J}_x^{(p)}(\tau) = e^{\tau\beta\hat{H}/P} \hat{J}_x^{(p)} e^{-\tau\beta\hat{H}/P}.$$

Доля сверхтекучей компоненты находилась также через флуктуации "winding number" [6, 13].

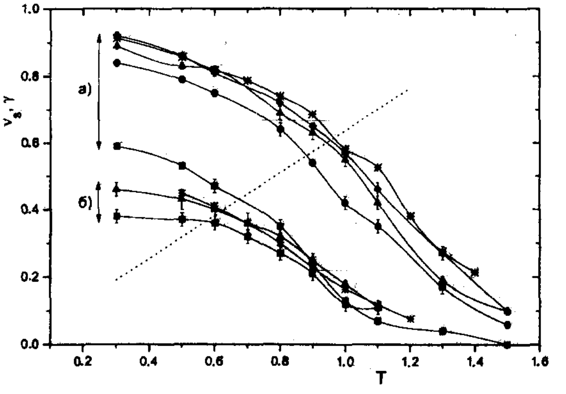

Рис.2. Зависимости доли сверхтекучей компоненты ν_s (helicity modulus γ в случае квантовой XY-модели) от температуры T: a) $q = 0.2$; b) $q = 2.0$; пунктирной линией показана зависимость $2T/\pi$. Интерполяция сплайнами приведена для удобства рассмотрения. Неуказаные статистические ошибки меньше размера соответствующих символов

Важной величиной, необходимой при исследовании роли мезоскопичности системы, являются флуктуации числа частиц на гранулах

$$\delta n^2 = \frac{1}{4PN^2}\left\langle \sum_{p=0}^{4P-1} \sum_i (n_i^p - n_0)^2 \right\rangle. \tag{4}$$

3. Рассмотрим результаты расчетов Монте-Карло модели квантовых косинусов (2). Основной величиной, описывающей состояние системы в данной точке $\{q, T\}$ фазовой диаграммы (рис.1), является доля сверхтекучей компоненты ν_s. Обращение величины ν_s в нуль свидетельствует о разупорядоченности системы. Измеренные зависимости доли сверхтекучей компоненты от температуры T при фиксированных значениях квантового параметра q приведены на рис.2. На этом рисунке показаны результаты расчетов системы $N\times N = 6\times 6$ при $n_0 = 1, 3, 5, 7$, а также, для сравнения, квантовой XY-модели (1). При слабом взаимодействии частиц на гранулах $q < 1$ (что в терминах XY-модели соответствует малой роли квантовых флуктуаций фаз параметра порядка) температура T_c перехода сверхпроводник – металл в значительной степени зависит от среднего числа частиц на гранулу n_0, (см. рис.2a). Температура $T_c(q)$ может быть оценена из универсального соотношения $\nu_s(q; T_c) = 2T_c/\pi$ [14]. Из рисунка видно, что для подавления флуктуационных явлений в системе мезоскопических гранул или пор требуются *меньшие* температуры, чем в случае систем макроскопических гранул. С увеличением плотности частиц (переходу к случаю массива макроскопических гранул), при $n_0 > 5$, графики $\nu_s(T; n_0)|_{q=\mathrm{const}}$ совпадают в пределах ошибок измерений и модель (2) переходит к своему пределу – квантовой XY-модели. Это наблюдение подтверждается также рис.3, представляющим зависимость доли сверхтекучей компоненты моделей (2) и (1) от величины квантового параметра q при $T = 0.5$. Отметим, что при $q > 1$ отличие свойств рассматриваемых моделей и, следовательно, эффекты мезоскопичности гранул массива несущественны. Рис.2b подтверждает это предположение.

Интересным эффектом, который показали наши расчеты, является *возвратная сверхпроводимость* массива мезоскопических гранул по параметру q (определяющему характерную энергию взаимодействия частиц). *Возрастание* плотности сверхтекучей компоненты с ростом квантового параметра q при фиксированной температуре T, явно заметное на рис.3, подтверждается результатами расчетов модели (2) по теории среднего поля [15] (см. рис.1).

С использованием вышеизложенных результатов построена фазовая диаграмма упорядоченного двумерного джозефсоновского массива мезоскопических гранул (см. рис.1). Для сравнения показан результат расчета по теории среднего поля, качественно согласующийся с данными Монте-Карло. Для сравнения отметим, что учет флуктуаций модуля параметра порядка (локальной сверхтекучей плотности) в рамках бозонной модели Хаббарда приводит к *увеличению* температуры перехода мезоскопической системы в сверхпроводящее состояние [8].

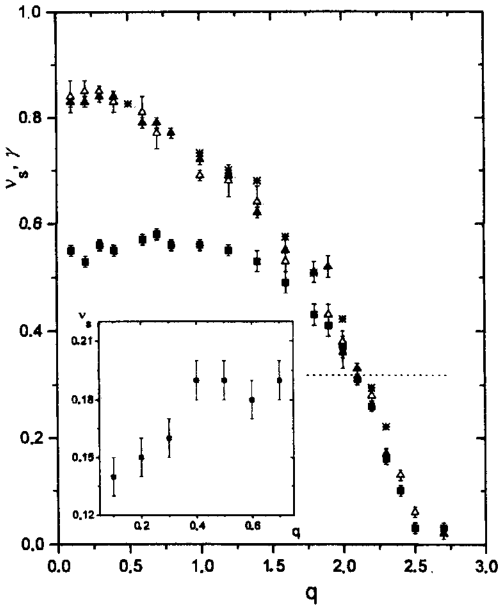

Рис.3. Зависимости доли сверхтекучей компоненты ν_s (helicity modulus γ в случае квантовой XY-модели) от величины квантового параметра q при $T = 0.5$; пунктирной линией показана линия $1/\pi$. На вставке показана зависимость $nu_s(q)$ при $T = 1$

Анализ флуктуаций числа частиц на гранулах (4) как функций температуры и квантового параметра позволяет более подробно проанализировать характер фазового перехода, имеющего место вдоль линии $T_c(q)$. Расчеты показывают, что с повышением температуры наблюдается рост флуктуаций числа частиц на гранулах, характерный для перехода в состояние с большей проводимостью. Следовательно, что при конечных температурах линия фазовых переходов $T_c(q)$ (см. рис.1) является линией переходов из сверхпроводящего (при $T < T_c(q)$) в металлическое состояние. Напротив, при фиксированной температуре флуктуации числа частиц как функция квантового параметра $\delta n^2(q)$ уменьшаются, что характерно для (кроссоверного при конечных температурах) перехода в состояние моттовского изолятора [16].

Рассматривая относительные среднеквадратичные флуктуации числа частиц $\epsilon_n \equiv \sqrt{\delta n^2/n_0^2}$, можно заключить, что значение $\epsilon = \epsilon_n^{mes} \sim 0.5$ может считаться критерием для определения мезоскопичности гранул массива, а именно: при меньших относительных флуктуациях система может рассматриваться как состоящая из макроскопических гранул и описываться квантовой XY-моделью (1).

4. Таким образом, предложена новая модель систем мезоскопических джозефсоновских контактов – модель квантовых косинусов (2), учитывающая квантовые флуктуации фаз параметра порядка и *не использующая* некорректного определения "оператора фазы". Эта модель может применяться для исследования свойств систем мезоскопических гранул или пор со сверхтекучей жидкостью, когда относительные флуктуации числа "эффективных бозонов" на гранулах или атомов жидкости в порах велики и квантовая XY-модель (1) неприменима.

Результаты расчетов показывают, что в случае системы слабо взаимодействующих частиц (при $q < 1$) температура установления глобального сверхпроводящего состояния существенно зависит от плотности частиц, приближаясь *снизу* к температуре перехода металл – сверхпроводник в системе макроскопических гранул или пор. При этом оказалось, что соответствующий "макроскопический" предел, когда система адекватно описывается в рамках квантовой XY-модели (1), достигается при сравнительно малых плотностях, $n_0 \sim 5$.

В области $q > 1$ значительных квантовых флуктуаций фаз взаимодействие значительно подавляет относительные флуктуации числа частиц на гранулах и мезоскопические эффекты важны только при низких температурах, $T < 0.5$, и малых плотностях, $n_0 \sim 1$.

Как видно из результатов расчетов, предложенная модель квантовых косинусов (2) не показывает (по крайней мере в исследованной области изменения управляющих параметров) эффектов возвратной сверхпроводимости *по температуре*, когда при некоторых значениях квантового параметра q глобальное сверхпроводящее состояние отсутствует как в области высоких, так и в области низких температур. Однако, при слабом взаимодействии частиц, при $q < 1$, имеет место *возвратная сверхпроводимость по квантовому параметру q*. Мы нашли, что для модели (2), в отличие от поведения модели Хаббарда и квантовой XY-модели, с уменьшением взаимодействия бозонов (силы квантовых флуктуаций фаз в терминах квантовой XY-модели) степень разупорядочения в системе увеличивается.

Авторы благодарят В.Ф. Гантмахера за полезное обсуждение результатов работы. Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований и Программ "Физика твердотельных наноструктур" и "Поверхностные атомные структуры".

---

1. P.W.Anderson, in *Lectures in: The Many Body Problem*, **2**, Ed. E.R.Caianiello, Academic, 1964.
2. J.B.Kim and M.Y.Choi, Phys. Rev. B **52**, 3624 (1997).
3. В.Ф.Гантмахер, В.М.Теплинский, В.Н.Зверев, Письма в ЖЭТФ **62**, 873 (1995).
4. P.Lafarge, M.Matters, and J.E.Mooij, Phys.Rev.B **54**, 7380 (1996).
5. M.C.Cha, M.P.A.Fisher, S.M.Girvin et al., Phys. Rev. B **44**, 6883 (1991); M.P.A.Fisher and G.Grinstein, Phys. Rev. Lett. **60**, 208 (1988); M.P.A.Fisher, P.B.Weichman, G.Grinstein, and D.S.Fisher, Phys. Rev. B **40**, 546 (1989).
6. W.Krauth, N.Trivedi, and D.Ceperley, Phys. Rev. Lett. **67**, 2703 (1991); W.Krauth and N.Trivedi, Europhys. Lett. **14**, 627 (1991).
7. C.Bruder, R.Fazio, G.Schön et al., Phys. Scr. **T42**, 159 (1992).
8. А.И.Белоусов, С.А.Верзаков, Ю.Е.Лозовик, ЖЭТФ **112**, (1997), в печати.
9. A.L.Dobryakov, V.S.Letokhov, Yu.E.Lozovik et. al., Appl. Phys. A **54**, 100 (1992).
10. S.G.Akopov and Yu.E.Lozovik, J. Phys. C **15**, 4403 (1982).
11. P.Carruthers and M.M.Nieto, Rev. Mod. Phys. **40**, 411 (1968); R.Lynch, Phys. Rep. **256**, 367 (1995).
12. W.H.Louisell, Phys. Lett. **7**, 60 (1963); L.Susskind and J.Glogower, Physics **1**, 49, (1964).
13. A.Blaer and J.Han, Phys. Rev. A **46**, 3225 (1992).
14. P.Minnhagen, Rev. Mod. Phys. **59**, 1001 (1987).
15. Yu.E.Lozovik and S.A.Verzakov, Phys. Lett. A (to be publ.)
16. S.L.Sondhi, S.M.Girvin et.al., Rev. Mod. Phys. **69**, 315 (1997).
17. А.И.Белоусов, Ю.Е.Лозовик, ФТТ **39**, 1513 (1997).