

КРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СПИНОВЫХ СИСТЕМ В ЧЕТЫРЕХПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В.В.Прудников¹⁾, А.В.Иванов, А.А.Федоренко

Омский государственный университет
644077 Омск, Россия

Поступила в редакцию 29 октября 1997 г.

Проведено теоретико-полевое описание критической динамики спиновых систем. Непосредственно для двумерных и трехмерных систем получены значения динамического критического индекса в четырехпетлевом приближении с применением техники суммирования Паде – Бореля. Проведено сравнение со значениями динамического индекса, полученными при численном моделировании методами Монте-Карло.

PACS: 64.60.-i

Для описания аномальных свойств термодинамических характеристик систем при фазовых переходах второго рода широко применяются методы ренормгруппы, позволяющие рассчитать значения критических индексов, характеризующих асимптотическое поведение термодинамических и корреляционных функций вблизи критической температуры. Наиболее перспективным среди этих методов является теоретико-полевой подход [1], обладающий двумя важными достоинствами. Во-первых, он позволяет использовать мощный и удобный математический аппарат, развитый в квантовой теории поля, что особенно важно для вычисления флуктуационных поправок высокого порядка для фазовых переходов второго рода в рамках использования теории возмущений. Во-вторых, он дает возможность проводить расчеты непосредственно при $d = 2, 3$ в виде разложения по вершине взаимодействия флуктуаций намагниченности без использования ε -разложения ($\varepsilon = 4 - d$, d – размерность системы). К настоящему времени в рамках этого подхода проведен расчет статических критических индексов, описывающих равновесное поведение системы в окрестности критической точки для модели $g\varphi^4$ в шестипетлевом приближении [2]. Полученные значения индексов считаются наиболее точными. Однако расчеты с подобной точностью отсутствуют при описании неравновесных свойств систем при фазовых переходах второго рода. В первую очередь это связано с быстрым ростом объема вычислений уже в самых низких порядках теории возмущений. Наиболее точные результаты были получены в работе [3], где вычисления проводились в трехпетлевом приближении.

В предлагаемой работе осуществляется теоретико-полевое описание неравновесного критического поведения ферромагнетиков в четырехпетлевом приближении. Рассматриваемая модель представляет собой классическую спиновую систему, термодинамически эквивалентную $O(n)$ симметричной модели Гинзбурга – Ландау с эффективным гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^d x \left(r_0 \varphi^2 + (\nabla \varphi)^2 + \frac{g_0}{12} \varphi^4 \right), \quad (1)$$

¹⁾ e-mail: prudnikov@univer.omsk.su

где d – размерность системы, $\varphi(\mathbf{x}, t)$ – n -компонентный параметр порядка (намагниченность), $\tau_0 \sim T - T_{oc}$ (T_{oc} – критическая температура, определяемая теорией среднего поля) и $g_0 > 0$ – вершина взаимодействия флуктуаций намагниченности.

Таблица 1.

Значения коэффициентов в выражениях для вершинных функций

Коэффициент.	$d = 2$	$d = 3$
A_1	-1,0	-1,0
A_2	1,3750699	1,2222222
A_3	-2,3054548	-1,7053479
B_1	0,0084916	0,0054869
B_2	-0,0116591	-0,0070112
B_3	0,0179966	0,0101430
C_1	0,0152547	0,0096865
C_2	-0,0213740	-0,0126257
C_3	0,0352450	0,0169420

Таблица 2

Значения четырехпетлевых диаграмм

N	$d = 2$	$d = 3$	N	$d = 2$	$d = 3$	N	$d = 2$	$d = 3$
1	0,165307	0,104869	17	0,004131	0,001108	33	0,007463	0,002527
2	0,009670	0,004166	18	0,003307	0,000923	34	0,029449	0,014580
3	0,022921	0,008180	19	0,003343	0,000932	35	0,070254	0,039776
4	0,059714	0,029674	20	0,034609	0,019410	36	0,006421	0,002378
5	0,003943	0,003264	21	0,034135	0,019189	37	0,012723	0,004691
6	0,010076	0,015354	22	0,011294	0,004177	38	0,007370	0,003820
7	0,028777	0,014330	23	0,004644	0,001928	39	0,027311	0,011650
8	0,016314	0,011627	24	0,005891	0,000706	40	0,013297	0,005377
9	-0,006853	-0,002506	25	0,010167	0,003421	41	0,007464	0,003981
10	0,002744	0,000823	26	0,003535	0,000862	42	0,010303	0,003314
11	0,009238	0,003444	27	0,002471	0,000551	43	0,023519	0,009470
12	0,010685	0,003745	28	0,011209	0,003898	44	0,010905	0,003866
13	-0,012280	-0,004883	29	0,003405	0,001077	45	0,038420	0,023730
14	-0,012280	-0,004883	30	0,011007	0,003815	46	0,062921	0,033485
15	0,017180	0,007527	31	0,012666	0,007379	47	0,021633	0,007121
16	-0,014199	-0,005471	32	0,009667	0,004177	48	0,011691	0,004760

Динамическое поведение магнетика в релаксационном режиме вблизи критической точки описывается кинетическим уравнением для намагниченности типа уравнения Ланжевена:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\lambda_0 \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi} + \zeta + \lambda_0 h, \quad (2)$$

где λ_0 – кинетический коэффициент, $\zeta(\mathbf{x}, t)$ – случайная сила, $h(\mathbf{x}, t)$ – внешнее магнитное поле. Известно, что его решение в виде корреляционных функций можно получить, используя производящий функционал следующего вида:

$$\Omega = \int D[\varphi] D[\psi] \exp \left(-\mathcal{H}_{eff}[\varphi, \psi] + \int \varphi h d^d x dt \right), \quad (3)$$

где введено вспомогательное поле ψ и эффективный гамильтониан

$$\mathcal{H}_{eff} = \int d^d x dt \left(\lambda_0^{-1} \varphi^2 + i\psi \left(\lambda_0^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi} \right) \right). \quad (4)$$

При этом корреляционная функция намагниченности определяется как

$$G(x, t) = \langle \varphi(0, 0) \varphi(x, t) \rangle = \frac{1}{\Omega} \frac{\delta^2 \Omega}{\delta h(0, 0) \delta h(x, t)}. \quad (5)$$

Вместо корреляционной функции удобнее рассматривать ее вершинную часть, которую можно представить в формализме фейнмановских диаграмм в четырехпетлевом приближении в виде

$$\Gamma^{(2)}(k, \omega; r_0, g_0, \lambda_0) = r_0 + k^2 - \frac{i\omega}{\lambda_0} - \frac{n+2}{18} \text{ (diagram)} g_0^2 + \\ + \frac{(n+2)(n+8)}{108} \left[\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} \right] g_0^3 - \left[\sum_{i=1}^{48} D_i^{(4)} \right] g_0^4.$$

Четырехпетлевые диаграммы приведены на рисунке, фейнмановские диаграммы содержат d -мерное интегрирование по импульсам и характеризуются вблизи критической точки ультрафиолетовой расходимостью в области больших импульсов \mathbf{k} с особенностями типа полюсов. Для устранения этих полюсов применяется схема размерной регуляризации, связанной с введением перенормированных величин [4]. Определим перенормированный параметр порядка как $\varphi = Z^{-1/2} \varphi_0$. Тогда перенормированные вершинные функции будут иметь обобщенный вид:

$$\Gamma_R^{(m)}(k, \omega; r, g, \lambda, \mu) = Z^{m/2} \Gamma^{(m)}(k, \omega; r_0, g_0, \lambda_0) \quad (6)$$

с перенормированными константой связи g , температурой r и кинетическим коэффициентом λ :

$$g_0 = \mu^{4-d} Z_g g, \quad r_0 = \mu^2 Z_r r, \quad \lambda_0^{-1} = \mu^2 Z_\lambda \lambda^{-1}, \quad (7)$$

где масштабный параметр μ вводится для обезразмеривания величин. Z – факторы определяются из требования регулярности перенормированных вершинных функций, отраженном в условиях нормировки:

$$Z \frac{\partial \Gamma^{(2)}(k)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=0} = 1, \quad Z^2 \Gamma^{(4)} \Big|_{k_i=0} = \mu^{4-d} g, \quad (8)$$

$$Z^2 \Gamma^{(2,1)} \Big|_{k_i, p_j=0} = 1, \quad Z \frac{\partial \Gamma^{(2)}(k, \omega)}{\partial (-i\omega)} \Big|_{k^2, \omega=0} = \lambda^{-1}. \quad (9)$$

Данная процедура регуляризации вершинных функций была осуществлена нами в рамках четырехпетлевого приближения. С этой целью представим фигурирующие в условиях нормировки значения вершинных функций в виде

$$\Gamma^{(4)} \Big|_{k_i=0} = g_0 + A_1 g_0^2 + A_2 g_0^3 + A_3 g_0^4, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial k^2} \Big|_{k^2=0} = 1 + B_1 g_0^2 + B_2 g_0^3 + B_3 g_0^4, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial (-i\omega)} \Big|_{k=0, \omega=0} = 1 + C_1 g_0^2 + C_2 g_0^3 + C_3 g_0^4, \quad (12)$$

где коэффициенты представляют собой суммы соответствующих диаграмм или их производных при нулевых внешних импульсах и частотах. Значения этих коэффициентов при $n = 1$ приведены в табл.1. Диаграммы на рисунке, образующие коэффициент C_3 , распадаются на 48 $4d$ -кратных интеграла, численные значения которых

приведены в табл.2. Запишем разложение величин g_0, Z, Z_λ по перенормированной константе связи g в виде

$$g_0 = g + b_1 g^2 + b_2 g^3 + b_3 g^4, \quad (13)$$

$$Z = 1 - z_1 g^2 - z_2 g^3 - z_3 g^4, \quad (14)$$

$$Z_\lambda = 1 + d_1 g^2 + d_2 g^3 + d_3 g^4, \quad (15)$$

где неизвестные b_i, z_i, d_i выражаются через A_i, B_i, C_i с помощью условий нормировки. Следующим шагом в теоретико-полевоом подходе является определение скейлинговых функций, задающих дифференциальное уравнение ренормгруппы:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - r \gamma_r \frac{\partial}{\partial r} + \lambda \gamma_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{m}{2} \gamma_\phi \right] \Gamma_R^{(m)} = 0. \quad (16)$$

Для обсуждения динамического поведения нам потребуются только функции $\beta(g)$ и $\gamma_\lambda(g)$:

$$\beta(g) = -(4-d) \left[\frac{\partial \ln Z_g}{\partial g} \right]^{-1}, \quad \gamma_\lambda(g) = \beta(g) \frac{\partial \ln Z_\lambda}{\partial g}. \quad (17)$$

Явный вид первой из них в шестипетлевом приближении был получен в работе [2]. Динамическая скейлинговая функция $\gamma_\lambda(g)$ в четырехпетлевом приближении, с учетом (7)–(15) принимает вид

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda(g) = & -(4-d)g[2(B_1 - C_1) + (3B_2 - 3C_2 - 4A_1B_1 + 4A_1C_1)g + \\ & + (4B_3 - 4C_3 - 9A_1B_2 + 9A_1C_2 + 10A_1^2B_1 - 10A_1^2C_1 - 4A_2B_1 + \\ & + 4A_2C_1 - 8B_1D_1 + 6B_1^2 - 2C_1^2)g^2]. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя значения коэффициентов из табл.1, получаем при $d = 2$ и $n = 1$

$$\gamma_\lambda(g) = 0.027053g^2 - 0.004184g^3 + 0.022130g^4, \quad (19)$$

при $d = 3$ и $n = 1$

$$\gamma_\lambda(g) = 0.008399g^2 - 0.000045g^3 + 0.020423g^4. \quad (20)$$

Динамический индекс z , характеризующий критическое замедление процессов релаксации, определяется как

$$z = 2 + \gamma(g^*), \quad \beta(g^*) = 0, \quad (21)$$

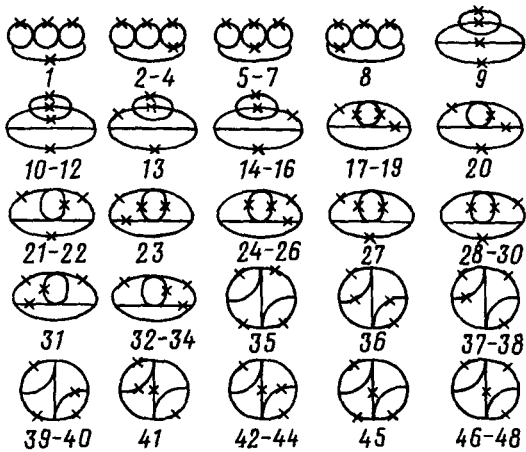
где значения фиксированных точек в четырехпетлевом приближении [2]

$$g^*(d = 2) = 1,8836, \quad g^*(d = 3) = 1,4299. \quad (22)$$

Полученные ряды являются асимптотически сходящимися. Для их суммирования был применен метод Паде–Бореля [2]. При использовании аппроксимантов [3/1] нами были получены следующие значения индекса z :

$$z^{(4)}(d = 2) = 2,093, \quad z^{(4)}(d = 3) = 2,017$$

в то время как в предыдущем (трехпетлевом) приближении его значения были $z^{(3)}(d = 2) = 2,066$ и $z^{(3)}(d = 3) = 2,016$, соответственно. Малое изменение индекса z для трехмерных систем позволяет считать, что учет поправок более высокого



Четырехпетлевые диаграммы, дающие вклад в вершинную функцию. Используемые обозначения диаграммной техники: сплошные линии соответствуют $G_0(k, \omega) = (r_0 + k^2 - i\omega/\lambda_0)^{-1}$, крестики - $C_0(k, \omega) = 2\lambda^{-1}((r_0 + k^2)^2 + (\omega/\lambda_0)^2)^{-1}$.

порядка может привести лишь к незначительным изменениям, выходящим за пределы точности эксперимента, в то время как для двумерных систем для подобного утверждения нет оснований.

Проведем сравнение полученных результатов с результатами других работ. Так, численное моделирование методами Монте-Карло трехмерной модели Изинга дает следующие значения: $z = 1.99 \pm 0.03$ [5], 2.10 ± 0.02 [6], 1.97 ± 0.08 [7], 2.04 ± 0.01 [8]; теоретико-полевой подход в двухпетлевом приближении при интерполяции результатов $1 + \epsilon$ и $4 - \epsilon$ разложений дает $z = 2.02$ [9]. Отсюда видно, что полученное нами значение динамического индекса $z^{(4)}(d = 3) = 2,017$ находится в хорошем согласии с результатами цитируемых работ, за исключением только работы [6]. Для двумерной модели Изинга приведем результаты компьютерного моделирования: $z = 2.14 \pm 0.02$ [5], 2.13 ± 0.03 [10], 2.076 ± 0.005 [11], 2.24 ± 0.04 [12], 2.24 ± 0.07 [13], 2.16 ± 0.04 [14], для теоретико-полевого подхода в двухпетлевом приближении при интерполяции результатов $1 + \epsilon$ и $4 - \epsilon$ разложений $z = 2.126$ [9] и высокотемпературного разложения $z = 2.183 \pm 0.005$ [15]. Отсюда видно, что для двумерной модели Изинга значения индекса z лежат в достаточно широком интервале $2.08 \leq z \leq 2.24$ и полученные нами значения находятся на его нижней границе. Однако использованную нами процедуру расчета индексов принято рассматривать как наиболее точную, поэтому вычисленные значения, мы надеемся, могут служить эталонами для работ по компьютерному моделированию однородных систем и использоваться при отработке методики моделирования неупорядоченных систем.

Исследования поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (грант N 97-02-16124).

1. E.Brezin, J.C.Le Guillou, and J.Zinn-Justin, in: *Phase transitions and critical phenomena*, Eds. C.Domb and M.S.Green, London - New York - San Francisco: Acad.Press, 1976, vol.6, p.125.
2. G.A.Baker, B.G.Nickel, and D.I.Meiron, *Phys. Rev.* **B17**, 1365 (1978).
3. В.В.Прудников, А.Н.Вакилов, *ЖЭТФ* **101**, 1853 (1992).
4. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, М.: Наука, 1976.
5. C.Kalle, *J.Phys.* **A17**, L-801 (1984).
6. H.-O.Heuer, *J.Phys.* **A25**, L-567 (1992).

7. В.В.Прудников, А.Н.Вакилов, ЖЭТФ **103**, 962 (1993).
8. U.Groeningen, Physica **A213**, 308 (1995).
9. R.Bausch, V.Dohm, H.K.Janssen, and R.K.P.Zia, Phys. Rev. Lett. **47**, 1837 (1981).
10. J.K.Williams, J. Phys. **A18**, 49 (1985).
11. M.Mori and Y.Tsuda, Phys. Rev. **B37**, 5444 (1988).
12. P.H.Poole, N.Jan, and D.I.Meiron, J. Phys. **A23**, L-453 (1990).
13. V.V.Prudnikov and O.N.Markov, J.Phys. **A28**, 1549 (1995).
14. F.Wang, N.Hatane, and M.Suzuli, J. Phys. **A28**, 4543 (1995).
15. B.Daman and I.D.Reger, Z. Phys. **B98**, 97 (1995).