Письма в ЖЭТФ, том 19, вып. 12, стр. 753 – 755 *20 июня 1974 г.*

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ВРИЗА (КДВ)

В.С.Дрюма

Двумерное уравнение КДВ приводится к виду $\hat{L}_t = i[\hat{L}, \hat{A}]$ с помощью соответствующей пары линейных операторов $\hat{L}$ и $\hat{A}$. Обсуждается вопрос о возможности интегрирования исходного уравнения методом обратной задачи теории рассеяния.

В работах [1, 2] предложено уравнение для описания процесса распространения двумерного возмущения в нелинейной слабо диспергирующей среде:

$$u_{tx} + (uu_x)_x + u_{xxxx} \pm \frac{1}{2} u_{yy} = 0. \tag{1}$$

Это уравнение является обобщением известного одномерного уравнения КДВ на случай, когда имеется слабая зависимость профиля возмущения от поперечной к направлению его распространения координаты y. (Верхний знак "+" в (1) относится к среде с отрицательной дисперсией, нижний – с положительной).

Для выяснения вопроса об эволюции произвольного начального возмущения с учетом его неодномерности необходимо исследовать решение задачи Коши для уравнения (1).

В настоящем сообщении для получения такого решения привлекается метод обратной задачи теории рассеяния [3 – 6]. В соответствии с основной идеей этого метода, запишем уравнение (1) в виде операторного соотношения

$$\hat{L}_t = i\,[\hat{L},\ A]\ . \tag{2}$$

В качестве операторов $\hat{L}$ и $\hat{A}$ выберем следующие пары операторов

$$\begin{aligned} \hat{L} &= 6\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sqrt{6}\frac{\partial}{\partial y} + u(x, y, t), \\ \hat{A} &= -4i\frac{\partial^3}{\partial x^3} - iu\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2}u_x - \frac{i}{2\sqrt{6}}\int^x u_y\,dx \end{aligned} \tag{3}$$

для отрицательно диспергирующей среды и

$$\begin{aligned} \hat{L} &= 6\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\sqrt{6}\frac{\partial}{\partial y} + u(x, y, t), \\ \hat{A} &= -4i\frac{\partial^3}{\partial x^3} - iu\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2}u_x - \frac{1}{2\sqrt{6}}\int^x u_y\,dx \end{aligned} \tag{4}$$

для положительно диспергирующей среды.

Решение задачи Коши для уравнения (1) сводится теперь к изучению прямой и обратной спектральных задач для операторов $\hat{L}$ из (3) и (4). В том случае, когда процесс распространения возмущения является одномерным, уравнение (1) совпадает с известным уравнением КДВ, а соответствующая ему $\hat{L}$-, $\hat{A}$-пара операторов, с помощью которой оно интегрируется методом обратной задачи теории рассеяния, получается из (3) и (4) путем отбрасывания производных по координате y.

Как это следует из вида операторов $\hat{L}$ (см. (3), (4)), прямая и обратная спектральные задачи для каждого из них оказываются различными, что и приводит к различным физическим выводам относительно особенностей процесса распространения возмущения в положительно или отрицательно диспергирующих средах [1, 2].

В заключение отметим, что уравнение (1) может быть получено из вариационного принципа с плотностью функции Лагранжа следующего вида

$$L = \frac{\phi_t\phi_x}{2} + \frac{\phi_x^3}{6} + \frac{\psi^2}{2} + \phi_x\psi_x \pm \frac{\phi_y^2}{4}\ ,$$

где $\phi_x = u(x, y, t)$, $\phi_{xx} = \psi$ и $\phi_{tx} + \phi_x\phi_{xx} + \psi_{xx} \pm \dfrac{\phi_{yy}}{2} = 0$.

Институт математики с ВЦ
Академии наук Молдавской ССР

Поступила в редакцию
6 апреля 1974 г.

Литература

[1] Б.Б.Кадомцев, В.И.Петвиашвили. ДАН СССР, **192**, 753, 1970.

[2] В.И.Петвиашвили. ДАН СССР, **201**, 1307, 1971.

[3] C.S.Gardner, Y.M.Green, M.D.Kruskal, R.M.Miura. Phys. Rev. Lett., **19**, 1095, 1967.

[4] P.D.Lax. Comm. on Pure and Appl. Math., **21**, 467, 1968.

[5] В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. ЖЭТФ, **61**, 118, 1971.

[6] Л.А.Тахтаджян. ЖЭТФ, **66**, 476, 1974.