

# Оптический зумерон как результат биений внутренних мод брэгговского солитона

Б. И. Манцызов<sup>1)</sup>

Физический факультет, МГУ им. М. В. Ломоносова, 119992 Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 июня 2005 г.

После переработки 12 июля 2005 г.

Аналитически и численно получено новое решение двухволновых уравнений Максвелла–Блоха, которое описывает распространение осциллирующей уединенной оптической нелинейной волны, или оптического зумерона, в одномерной периодической резонансной брэгговской структуре. Показано, что причиной возникновения больших осцилляций скорости и суммарной амплитуды блоховских мод импульса являются биения внутренних мод возмущенного брэгговского солитона.

PACS: 42.25.Fx, 42.50.Md, 42.65.Tg, 42.70.Qs

Интерес к исследованиям динамики нелинейных волновых процессов с участием уединенных нелинейных волн, или солитонов, неизменно высок в различных областях естественных наук и техники [1]. Прежде всего это связано с большим многообразием в природе нелинейных динамических систем, эволюция которых в значительной мере определяется уникальными свойствами солитонов – сохранением ими формы и скорости при распространении и после взаимодействия. Строго говоря, такими свойствами обладают лишь решения полностью интегрируемых нелинейных динамических уравнений, например, синус-уравнения Гордона, уравнений Максвелла–Блоха, нелинейного уравнения Шредингера и некоторых других уравнений, которые появляются в результате использования ряда приближений при решении физических проблем. Математически же, используя метод обратной задачи рассеяния, можно построить бесконечное число полностью интегрируемых уравнений, в том числе и таких, которые, в зависимости от начальных условий могут обладать как традиционными солитонными, так и качественно новыми решениями, называемыми зумеронами [2]. Зумерон обладает характерной для солитона устойчивостью при распространении и взаимодействии, но демонстрирует новую динамику, его амплитуда и скорость испытывают значительные осцилляции в процессе движения, причем возможно изменение не только величины, но и знака скорости импульса. Поэтому обнаружение уравнений типа уравнения зумерона в реальных физических задачах открыло бы широкие возможности для исследования новых закономерностей в динамике нелинейных систем, позволило бы обоб-

щить разнообразные результаты по солитонной динамике на случай осциллирующих импульсов. К сожалению, до настоящего времени не найдено физическое явление, которое бы описывалось полностью интегрируемым уравнением зумерона. Вместе с тем известно [3], что изменение величины скорости солитоноподобных решений в уравнениях, близких к полностью интегрируемым, возможно, например, при захвате солитона возмущением, когда возникают осцилляции с нулевой средней скоростью вблизи возмущения, а также при неупругом столкновении импульсов, которое сопровождается однократным возбуждением и поглощением внутренней моды (ВМ) солитона [4]. Возможны также долгоживущие осцилляции амплитуды солитона при возбуждении ВМ на ненулевой частоте [5], однако при этом скорость солитона сохраняется или изменяется незначительно. Для брэгговских солитонов (БС) не полностью интегрируемых двухволновых уравнений Максвелла–Блоха [6] и нелинейных уравнений Шредингера для связанных мод [7] имеет место динамическая мультистабильность, когда при определенных начальных условиях возникают осцилляции скорости импульса, причем с характерным для зумерона изменением ее знака, однако лишь при нулевом среднем значении. В результате численного моделирования динамики БС в резонансно поглощающей решетке в случае малой отстройки от точного условия Брэгга наблюдались значительные осцилляции амплитуд блоховских волн и скорости БС при его распространении с ненулевой средней скоростью [8], однако физическая причина появления подобной динамики импульса до настоящего времени оставалась не выясненной.

В настоящей работе решена задача о возбуждении ВМ в стоячем БС самоиндуцированной прозрачно-

<sup>1)</sup>e-mail: mantys@genphys.phys.msu.ru

ти с возмущенными профилями огибающих прямой и обратной блоховских волн и показано, что возможно одновременное возбуждение двух близких по форме ВМ на малой и нулевой частотах. В результате биений этих мод возникает периодический обмен энергией между полями ВМ и резонансной подсистемой двухуровневых атомов в БС, который приводит к возникновению осцилляций инверсии возбужденных атомов в БС. Решение обобщается на случай медленно движущегося солитона. Такой солитон уже испытывает возмущение не только за счет деформации профиля, но и вследствие осцилляций инверсии при биениях ВМ, что приводит к значительным осцилляциям амплитуды, поляризации, инверсии и скорости импульса. Подобная динамика уединенной волны характерна для зумерона. Параметры решений, полученных прямым численным интегрированием двухволновых уравнений Максвелла–Блоха, хорошо согласуются с предложенным аналитическим решением для оптического зумероноподобного импульса. С помощью интеграла энергии получена зависимость скорости зумерона от времени.

Задача о когерентном взаимодействии лазерного излучения с одномерной резонансной брэгговской структурой, представляющей собой периодически расположенные тонкие слои, содержащие двухуровневые осцилляторы, описывается двухволновыми уравнениями Максвелла–Блоха [9] для медленных комплексных амплитуд электрического поля  $E^\pm$  прямой и обратной блоховских волн, среднего дипольного момента атома  $P$ , нормированного на дипольный момент перехода, и инверсии  $n$ :

$$\Omega_t + \tilde{\Omega}_x = 2P, \quad \tilde{\Omega}_t + \Omega_x = 0, \quad (1.1)$$

$$P_t = n\Omega, \quad n_t = -\frac{1}{2}(P^*\Omega + P\Omega^*), \quad (1.2)$$

где  $\Omega = \Omega^+ + \Omega^-$ ;  $\tilde{\Omega} = \Omega^+ - \Omega^-$ ;  $\Omega^\pm = (2\tau_c\mu/\hbar)E^\pm$ ;  $\tau_c$  – кооперативное время;  $\mu$  – матричный элемент дипольного момента перехода;  $x = x'/c\tau_c$ ,  $t = t'/\tau_c$  – безразмерные переменные;  $x'$ ,  $t'$  – пространственная координата и время;  $c$  – скорость света; нижние индексы  $x$  и  $t$  обозначают частные производные. Уравнения (1) записаны в приближениях точного выполнения условия Брэгга и совпадения частот излучения и резонансного перехода осцилляторов.

Найдем сначала выражение для ВМ возмущенного брэгговского солитона с нулевой скоростью распространения, чтобы затем обобщить полученные решения на случай медленно движущегося солитона.

Уравнения (1) обладают следующими интегралами движения, соответствующими сохранению пол-

ной энергии  $W$  и топологического заряда  $Q$  локализованного  $\Omega(x = \pm\infty; t) = 0$  решения:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}\Omega\Omega^* + \frac{1}{4}\tilde{\Omega}\tilde{\Omega}^* + (1+n)dx, \quad (2)$$

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Omega} dx.$$

Будем искать решение в виде линейной суперпозиции деформированного стоячего солитонного решения уравнений (1)  $\Omega_s, \tilde{\Omega}_s$  и малого возмущения  $\delta\Omega, \delta\tilde{\Omega}$  удовлетворяющего второму уравнению (1.1):

$$\Omega(x, t) = \Omega_s(x) + \delta\Omega, \quad \tilde{\Omega}(x, t) = \tilde{\Omega}_s(x) + \delta\tilde{\Omega}, \quad (3)$$

где

$$\delta\Omega = i\varepsilon f_t(t)\varphi(x), \quad \delta\tilde{\Omega} = -i\varepsilon[f(t)\varphi_x(x) + \varphi_{1x}(x)]; \quad (4)$$

солитонные составляющие  $\Omega_s(x)=0$ ,  $\tilde{\Omega}_s(x)=(4/\beta) \times \text{sech}(\beta x)$ ;  $\beta \equiv \sqrt{2-\alpha}$ ;  $\alpha$  – параметр деформации профиля солитона,  $\alpha = 0$  соответствует точному солитонному решению;  $\varepsilon$  – малый действительный параметр;  $f(t), \varphi(x)$  – действительные функции. Выбор возмущения  $\delta\Omega, \delta\tilde{\Omega}$  в виде чисто мнимых добавок (в общем случае необходимо смещение по фазе на  $\pi/2$  относительно солитонного решения) позволяет исключить перекрестные члены  $\int_{-\infty}^{\infty} dx(\delta\Omega\Omega_s^* + \delta\tilde{\Omega}\tilde{\Omega}_s^* + \text{с.с.}) = 0$  из интеграла энергии (2). Таким образом мы исключаем взаимодействие полевых компонент солитона с ВМ, оставляя, однако, возможность взаимодействия ВМ с резонансными осцилляторами. Это взаимодействие описывается уравнениями Блоха (1.2), которые имеют следующие решения для полей (3), (4):

$$P(x, t) = -2\text{sech}\beta x \text{th}\beta x + i(-1 + 2\text{sech}^2\beta x) \sin[\varepsilon(f\varphi + b\varphi_1)], \quad (5)$$

$$n(x, t) = (-1 + 2\text{sech}^2\beta x) \cos[\varepsilon(f\varphi + b\varphi_1)],$$

где  $b$  – константа интегрирования, определяемая из начальных условий. Подставляя (3), (4), (5) в исходные уравнения (1.1) и проводя линеаризацию с учетом  $\varepsilon, \omega, \alpha \ll 1$ , находим выражения для функций

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t + \phi_0), \quad \varphi_1(x) = \varphi_0 \text{sech}\beta x, \quad (6)$$

если  $b = 1 - \alpha/2$ . Здесь  $\phi_0$  – начальная фаза;  $f_0, \varphi_0$  – амплитуды функций, удовлетворяющие условиям  $\varepsilon f_0, \varepsilon \varphi_0 \ll 1$ . Ниже полагаем  $f_0 = 1$ . Соответствующее уравнение для функции  $\varphi(x)$  имеет вид

$$\beta^{-2}\varphi_{xx} + \left[-1 + \frac{\omega^2 - \alpha}{2} + (2 + \alpha)\text{sech}^2\beta x\right] \varphi = 0. \quad (7)$$

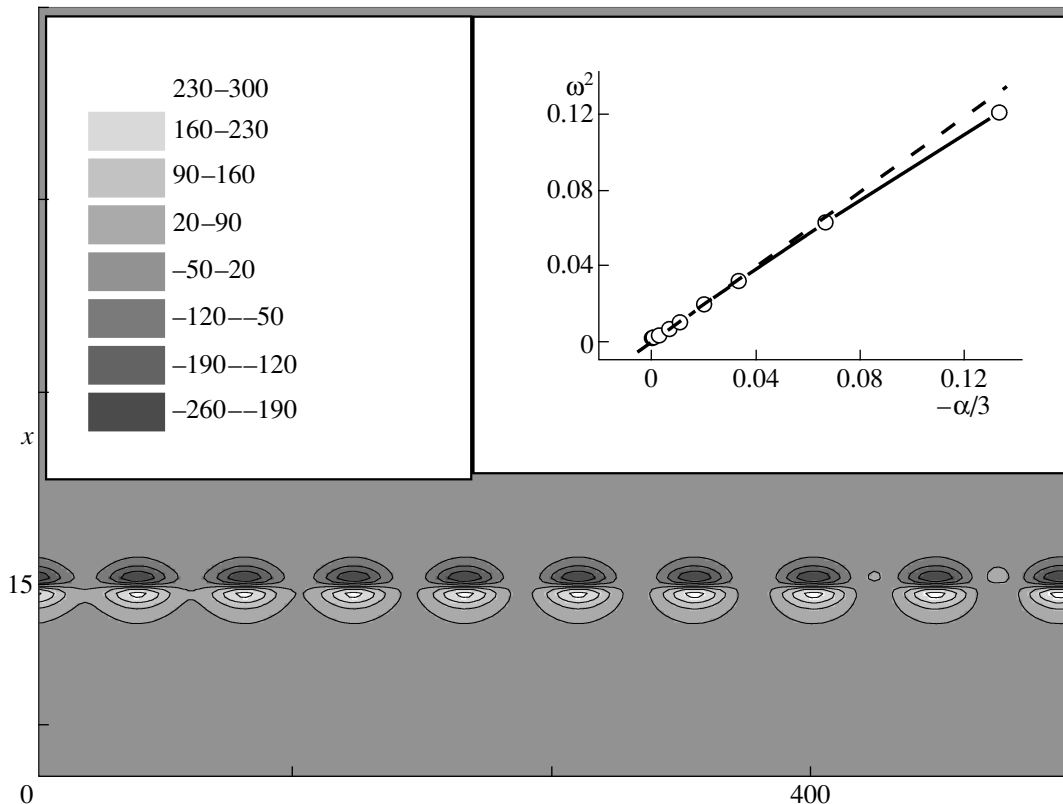


Рис.1. Пространственно-временная динамика разностного поля  $\delta\tilde{\Omega}$  внутренних мод БС в случае биений двух мод с ненулевой и нулевой частотами. На вставке представлены зависимости квадрата частоты осцилляций ВМ  $\omega$  от параметра возмущения профиля солитона  $\alpha$ , полученные при вычислении по формуле (9) (штриховая линия) и в результате численного интегрирования уравнений (1) с начальными условиями (3), (5), (10) (сплошная линия)

С помощью теории возмущений нетрудно показать, что задача на собственные значения (7) имеет конечное локализованное решение

$$\varphi(x) = \operatorname{sech} \beta x - \frac{\alpha}{3}(1 + \ln \operatorname{ch} \beta x) \operatorname{sech} \beta x, \quad (8)$$

если

$$\omega^2 = -\alpha/3. \quad (9)$$

Подставляя (6), (8) в (4), запишем выражения для найденных ВМ, опуская члены порядка  $\varepsilon\omega^2$ :

$$\begin{aligned} \delta\Omega &= -i\varepsilon\omega \sin \omega t \operatorname{sech} \beta x, \\ \delta\tilde{\Omega} &= i\varepsilon\beta(\cos \omega t + \varphi_0) \operatorname{sech} \beta x \operatorname{th} \beta x. \end{aligned} \quad (10)$$

Ненулевая малая частота осцилляций (9) определяется параметром деформации профиля солитона  $\alpha < 0$ . Величина разностного поля  $\delta\tilde{\Omega}$  (10) является суперпозицией двух мод с ненулевой и нулевой частотами, причем формы этих мод  $\sim \operatorname{sech} \beta x \operatorname{th} \beta x$  определяются функциями  $\varphi_{1x}$  (6) и  $\varphi_x$  (8) и в первом приближении по малому параметру совпадают. Это приводит к эффективным биениям указанных мод с частотой

той осциллирующей моды  $\omega$ , если величина  $|\varphi_0| \approx 1$ . Отметим, что наличие ВМ на нулевой частоте для невозмущенных солитонных решений, случай  $\omega = 0$  в (10), является характерным свойством ряда нелинейных динамических уравнений, например, синус-уравнения Гордона [3]. На рис.1 представлены результаты численного интегрирования уравнений (1), когда в качестве начальных условий выбирались аналитические решения (3), (5), (10) для стоячего солитона с ВМ. Отсутствие потерь на излучение волн непрерывного спектра свидетельствует об устойчивости найденных решений для ВМ. Значение частоты осцилляций (см. вставку на рис.1) и форма ВМ хорошо согласуются с аналитическими результатами (9), (10). Из рисунка также видно, что в результате биений энергия, заключенная в полях ВМ, изменяется от нулевого значения до некоторого максимального. При этом на соответствующую величину изменяется и энергия системы возбужденных двухуровневых атомов вследствие изменения инверсии  $n(x, t)$  (5). В рассмотренном выше случае БС с нулевой скоростью

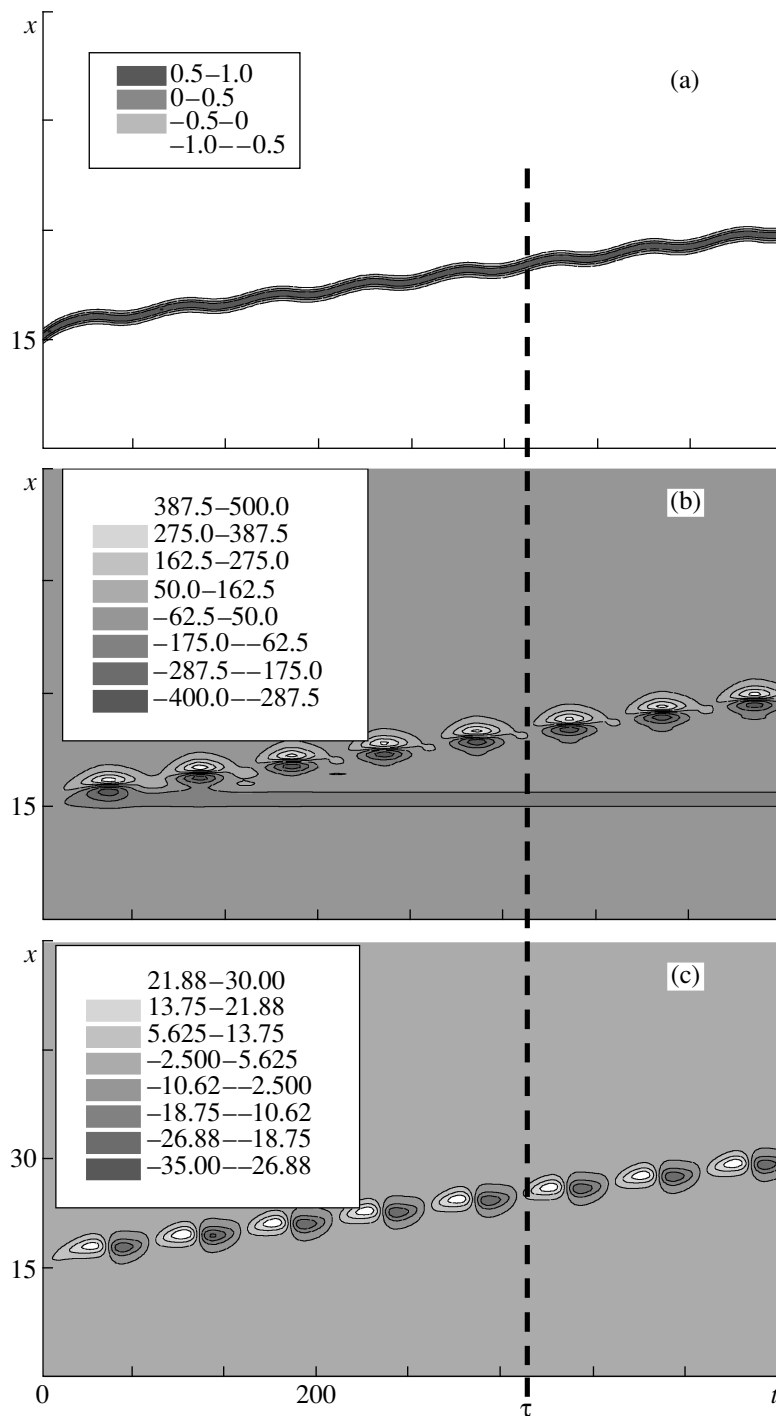


Рис.2. Динамика (а) инверсии  $n(x,t)$ , (b) разностного  $\delta\tilde{\Omega}(x,t)$  (отн. ед.) и (с) суммарного  $\delta\Omega(x,t)$  (отн. ед.) полей ВМ зумероноподобного импульса. Вертикальная штриховая линия соответствует моменту времени  $t = \tau$ , когда амплитуды полей ВМ равны нулю и скорость импульса максимальна

тью, биения ВМ не приводят к изменению скорости солитона. Однако в случае движущегося БС изменение максимального значения величины инверсии атомов при биениях ВМ является дополнительным возмущением солитона и может привести к значи-

тельному изменению скорости распространения импульса.

Обобщим полученные решения для возмущенного стоячего солитона (3), (5), (10) на случай БС, распространяющегося с малой скоростью  $v \ll \omega$ . Пред-

положим, что форма огибающей возмущенного движущегося солитона совпадает с формой точного решения [9], а форма внутренних мод мало отличается от полученных выше выражений (10). Пусть при этом координата центра импульса  $\xi(t)$  и его скорость  $v(t) = \xi_t(t)$  зависят от времени вследствие возмущения солитона при биениях ВМ. Таким образом, пробное решение выбираем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{4v(t)}{\beta\sqrt{1-v^2}} \operatorname{sech} \frac{\beta(x-\xi(t))}{\sqrt{1-v^2}} + \\ &+ i\varepsilon\omega \sin(\omega t) \operatorname{sech} \frac{\beta(x-\xi(t))}{\sqrt{1-v^2}}, \\ \tilde{\Omega} &= \frac{4}{\beta\sqrt{1-v^2}} \operatorname{sech} \frac{\beta(x-\xi(t))}{\sqrt{1-v^2}} - \\ &- i \frac{\varepsilon\beta}{\sqrt{1-v^2}} (\cos \omega t + \varphi_0) \operatorname{sech} \frac{\beta(x-\xi(t))}{\sqrt{1-v^2}} \operatorname{th} \frac{\beta(x-\xi(t))}{\sqrt{1-v^2}}, \\ n &= \left( -1 + 2 \operatorname{sech}^2 \frac{\beta(x-\xi(t))}{\sqrt{1-v^2}} \right) \times \\ &\times \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\cos \omega t + \varphi_0)^2 \operatorname{sech}^2 \frac{\beta(x-\xi(t))}{\sqrt{1-v^2}} \right), \\ P &= -2 \operatorname{sech} \frac{\beta(x-\xi(t))}{\sqrt{1-v^2}} \operatorname{th} \frac{\beta(x-\xi(t))}{\sqrt{1-v^2}} + \\ &+ i\varepsilon \left( -1 + 2 \operatorname{sech}^2 \frac{\beta(x-\xi(t))}{\sqrt{1-v^2}} \right) \times \\ &\times (\cos \omega t + \varphi_0) \operatorname{sech} \frac{\beta(x-\xi(t))}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (11) в интеграл энергии (2), получим выражение для скорости импульса:

$$v(t) = \frac{\varepsilon\omega\sqrt{\varphi_0}}{2} (1 - \cos \omega t)^{1/2}. \quad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что скорость и амплитуды полей в импульсе, а также дипольный момент и инверсия атомов в возмущенном БС, осциллируют с частотой внутренней моды солитона (9), демонстрируя тем самым зумероноподобную динамику распространения импульса.

Для подтверждения того, что предложенное пробное решение (11) достаточно близко к истинному, а также для демонстрации устойчивости такого зумероноподобного (ЗП) решения мы провели прямое численное интегрирование уравнений (1), выбирая в качестве начальных условий аналитическое решение (11). Как видно из рис.2, полученная при этом пространственно-временная динамика инверсии и полей внутренних мод соответствует аналитическим выражениям (11). Аналогичные результаты

имеют место и для полей  $\Omega_s, \tilde{\Omega}_s$  солитонных составляющих решения и для функции дипольного момента  $P$ . Топологический заряд (2) осциллирующего импульса, полученного при численном моделировании, удовлетворяет неравенству  $Q < 2\pi$ , что соответствует аналитическому результату при подстановке решения (11) в (2):  $Q = 2\pi + \alpha\pi$ ,  $\alpha < 0$ . На начальном этапе эволюции решения наблюдается слабое излучение (рис.2b), однако потери энергии при этом весьма малы, порядка 0.05% энергии импульса, что свидетельствует о близости пробного ЗП решения к истинному. Полученное ЗП решение является квазиустойчивым, оно сохраняет устойчивость в течение времени порядка ста периодов осцилляций и упруго взаимодействует с солитоном, движущимся со скоростью  $v \geq 0.1$ . Столкновение же двух ЗП импульсов может быть как упругим, так и неупругим в зависимости от скорости и знаков амплитуд взаимодействующих импульсов. Сравнение графиков рис.2 позволяет наглядно объяснить причину возникновения осцилляций ЗП импульса. В момент времени  $t = \tau$ , когда скорость импульса максимальна, рис.2а, амплитуды полей внутренних мод равны нулю, рис.2b,с. Далее происходит увеличение энергии ВМ за счет излучения энергии возбужденных атомов среды (максимальное значение инверсии в центре импульса при

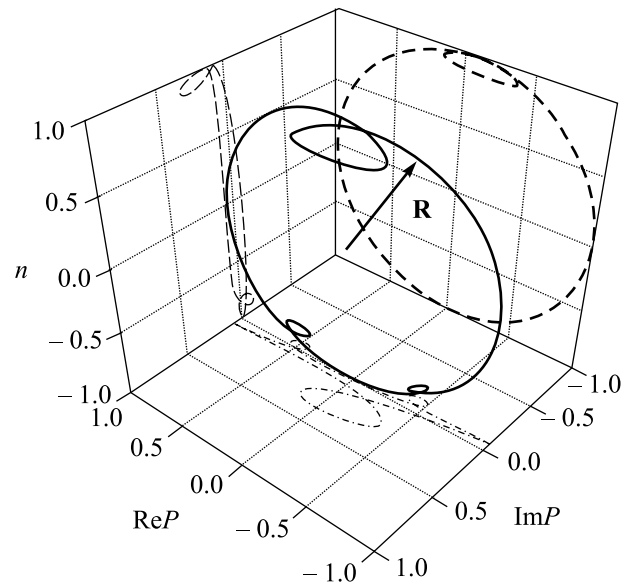


Рис.3. Траектория вектора Блоха  $\mathbf{R}(x = x_0; t) = \{\operatorname{Re} P; \operatorname{Im} P; n\}$  на единичной сфере в некоторой точке среды  $x = x_0$  при распространении ЗП импульса (сплошная кривая). Штриховые линии соответствуют проекциям указанной траектории на координатные плоскости. Каждая петля траектории соответствует одной осцилляции импульса

этом становится меньше единицы, рис.3), импульс останавливается, затем энергия ВМ поглощается резонансными атомами и импульс ускоряется, вновь достигая максимального значения скорости. Поэтому можно сделать вывод, что осцилляции ЗП импульса происходят в результате биений ВМ и обмена энергией между ВМ и резонансными атомами, как и следует из аналитических решений (11), (12). Результаты численного моделирования подтверждают также вид зависимости скорости ЗП импульса от времени (12) и линейную зависимость максимальной скорости от частоты. Таким образом, предложенное решение для ЗП импульса (11), (12) хорошо описывает динамику осциллирующего импульса, полученного в результате прямого численного интегрирования двухволновых уравнений Максвелла–Блоха (1).

В заключение отметим, что двухволновые уравнения Максвелла–Блоха, как следует из ряда свойств их решений, являются не полностью интегрируемыми. Сложно ожидать, что эти уравнения имеют точное зумеронное решение, представляющее собой осциллирующий солитон интегрируемых нелинейных уравнений. Поэтому описанное в настоящей работе приближенное зумероноподобное решение представляет интерес как, по-видимому, первый пример осциллирующих квазиустойчивых нелинейных уединенных волн с ненулевой средней скоростью распространения и большой амплитудой осцилляций скорости, которые появляются в реальной физической задаче, в

данном случае – в задаче о распространении лазерных импульсов в резонансной брэгговской структуре.

Автор благодарит А. И. Маймистова за полезные обсуждения результатов. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 04-02-16866).

- 
1. Yu. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, San Diego, 2003.
  2. Ф. Калоджеро, А. Дегасперис, *Нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемые обратным спектральным преобразованием, ассоциированным с матричным уравнением Шредингера*, в *Солитоны*, ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри, М.: Мир, 1983 (*Solitons*, Eds. R. Bullough and P. Caudrey, Springer-Verlag, Berlin, 1980).
  3. Y. S. Kivshar and B. A. Malomed, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 763 (1989).
  4. D. K. Campbell, J. F. Schonfeld, and C. A. Wingate, *Physica D* **9**, 1 (1983).
  5. D. E. Pelinovsky, Y. S. Kivshar, and V. A. Afanasjev, *Physica D* **116**, 121 (1998).
  6. B. I. Mantsyzov and R. A. Silnikov, *J. Opt. Soc. Am. B* **19**, 2203 (2002).
  7. F. De Rossi, C. Conti, and S. Trillo, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 85 (1998).
  8. B. I. Mantsyzov, *Phys. Rev. A* **51**, 4939 (1995).
  9. Б. И. Манцызов, Р. Н. Кузьмин, *ЖЭТФ* **91**, 65 (1986).