

## Альтернативный способ вычисления собственных значений трансфер-матрицы $\tau_2$ -модели при $N = 2$

А. И. Бугрий<sup>1)</sup> Н. З. Иоргов<sup>1)</sup>, В. Н. Шадура<sup>1)</sup>

Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, 03143 Киев, Украина

Поступила в редакцию 14 июля 2005 г.

Показано, что  $\tau_2$ -модель (модель Бакстера–Бажанова–Строганова) при  $N = 2$  с произвольными значениями параметров является частным случаем обобщенной модели Изинга. Модель удовлетворяет условию “свободных фермионов”, что дает возможность решить ее методом вспомогательного грасманового поля. Найдены явные выражения для статистической суммы на решетке конечных размеров и собственные значения трансфер-матрицы. В данном подходе не возникает вопрос о кратностях собственных значений трансфер-матрицы в отличие от метода функциональных соотношений.

PACS: 05.50.+q, 75.10.Hk

Одной из немногих точно решаемых решеточных моделей, в которой псевдоспиновые переменные принимают  $N$  значений, является  $\tau_2$ -модель. Эта модель возникла в работе Бакстера [1], где он заметил, что обратная матрица к трансфер-матрице столбец-столбец суперинтегрируемой киральной модели Поттса определяет новую интегрируемую модель, которую он назвал “Inverse SOS” модель. Немного позже эта модель в  $L$ -матричной формулировке появилась в работе Бажанова и Строганова [2] как вспомогательная модель, позволяющая установить связь между шестивершинной моделью и киральной моделью Поттса. Связь между тремя этими моделями позволила сформулировать систему функциональных соотношений [2, 3] для трансфер-матриц этих моделей. Решение этой системы функциональных соотношений является одним из основных методов вычисления свободной энергии киральной модели Поттса. Совсем недавно, используя связь  $\tau_2$ -модели с киральной моделью Поттса и на основании некоторых предположений об аналитических свойствах, удалось проверить формулу для параметра порядка в киральной модели Поттса [4]. В дальнейшем вместо термина “ $\tau_2$ -модель” мы будем использовать название “модель Бакстера–Бажанова–Строганова” (или сокращенно ББС модель).

В данной работе показано, что ББС модель при  $N = 2$  является частным случаем обобщенной модели Изинга. Модель удовлетворяет условию “свободных фермионов”, что дает возможность решить ее методом вспомогательного грасманового поля [5]. Несложные вычисления дают явные выражения для

статистической суммы на решетке конечных размеров и собственных значений трансфер-матрицы. Подобное выражение для собственных значений было получено в работе [6] методом функциональных соотношений. Недостатком метода функциональных соотношений является то, что этот метод дает набор решений, который содержит все собственные значения трансфер-матрицы, но, для определения, какие из решений действительно являются собственными значениями (и с какой кратностью), необходимы дополнительные исследования. Метод, представленный в работе, лишен этого недостатка: он дает набор собственных значений однозначно.

Модель Бакстера–Бажанова–Строганова рассматривается [7] на прямоугольной решетке, в узлах которой находятся псевдоспиновые переменные  $b_r$  ( $r$  – номер узла решетки), принимающие  $N$ ,  $N \geq 2$ , значения  $0, 1, \dots, N - 1$ . Удобно распространить значения  $b_r$  на все целые числа, отождествляя два значения, если их разность кратна  $N$ . Не все значения допустимы: значения в соседних по вертикали узлах  $r$  и  $s$  ( $r$  выше  $s$ ) должны удовлетворять дополнительному условию

$$b_r = b_s \text{ или } b_s + 1 \pmod{N}. \quad (1)$$

Модель зависит от следующих (в общем случае комплексных) параметров:  $\alpha, t, x, y, \mu, x', y', \mu'$ . Каждому плакету сопоставляется больцмановский вес

$$W_r(b^1, b^2, b^3, b^4) = \alpha \sum_{m=0}^1 \omega^{m(b^4 - b^2)} (-\omega t)^{b^1 - b^4 - m} \times \\ \times F(b^1 - b^4, m) F'(b^2 - b^3, m),$$

<sup>1)</sup> e-mail: abugrij@bitp.kiev.ua; iorgov@bitp.kiev.ua; shadura@bitp.kiev.ua

где  $\omega = e^{2\pi i/N}$ ,

$$\begin{aligned} F(0,0) &= 1, & F(0,1) &= -\omega t/y, \\ F(1,0) &= \mu/y, & F(1,1) &= -\omega x\mu/y, \end{aligned}$$

а выражения для  $F'(l, m)$  получаются из выражений для  $F(l, m)$  заменой  $x, y, \mu$  на  $x', y', \mu'$ , соответственно. Отметим, что ББС модель является  $\mathbb{Z}_N$ -симметричной, то есть прибавление одного и того же числа к значениям  $b_r$  во всех узлах решетки не изменяет больцмановские веса плакетов.

При  $N = 2$  мы переформулируем модель следующим образом. В узлах решетки размещены изинговские спины  $\sigma_r$ , которые принимают значения  $+1$  и  $-1$  вместо 0 и 1 для  $b_r$ , соответственно. При  $N = 2$  правило (1) автоматически выполняется. Больцмановский вес, сопоставляемый плакету, следующий:

$$\begin{aligned} w_r(\sigma^1, \sigma^2; \sigma^4, \sigma^3) &= \alpha \sum_{m=0}^1 (-1)^{m(b^4 - b^2)} t^{|b^1 - b^4| - m} \times \\ &\times F(|b^1 - b^4|, m) F'(|b^2 - b^3|, m), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $b^k = (1 - \sigma^k)/2$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , и

$$\begin{aligned} F(0,0) &= 1, & F(0,1) &= t/y, \\ F(1,0) &= \mu/y, & F(1,1) &= x\mu/y. \end{aligned}$$

Аналогично определяется  $F'$ .

Трансфер-матрица обобщенной модели Изинга (ОМИ) при отсутствии внешнего поля имеет вид (нумерация узлов решетки показана на рис.1)

$$T_{[\sigma, \sigma']} = \prod_{x=1}^L w(\sigma_x, \sigma_{x+1}; \sigma'_x, \sigma'_{x+1}). \quad (3)$$

Ее размерность  $2^L \times 2^L$ ,  $L$  – число узлов на решетке вдоль горизонтальной оси,  $\sigma_x$  – изинговский псевдоспин. Граничные условия – периодические ( $\sigma_{L+1} = \sigma_1$ ). Наиболее общий вид  $\mathbb{Z}_2$ -симметричной функции от 4 спиновых переменных определяется 8-ю пара-

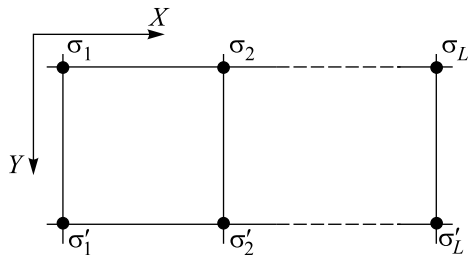


Рис.1

метрами

$$w(\sigma^1, \sigma^2; \sigma^4, \sigma^3) = a_0 \left( 1 + \sum_{i < k}^4 a_{ik} \sigma^i \sigma^k + a_4 \sigma^1 \sigma^2 \sigma^3 \sigma^4 \right). \quad (4)$$

Нумерация спинов в выражении для статистического веса (4) в элементарном плакете решетки показана на рис.2.

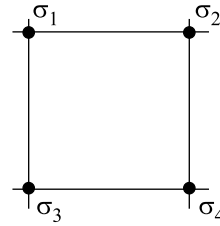


Рис.2

Отметим, что ОМИ без внешнего поля, переписанная в терминах стрелок-диполей, имеет однозначное (на уровне статистических весов) соответствие с 8-вершинной моделью с внешним полем [8].

Рассматриваемой нами ББС модели (2) соответствует следующий набор параметров больцмановского веса (4):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\alpha}{4} \left( 1 + \frac{t\mu}{y} \right) \left( 1 + \frac{\mu'}{y'} \right), \\ a_0 a_{14} &= \frac{\alpha}{4} \left( 1 - \frac{t\mu}{y} \right) \left( 1 + \frac{\mu'}{y'} \right), \\ a_0 a_{23} &= \frac{\alpha}{4} \left( 1 + \frac{t\mu}{y} \right) \left( 1 - \frac{\mu'}{y'} \right), \\ a_0 a_4 &= \frac{\alpha}{4} \left( 1 - \frac{t\mu}{y} \right) \left( 1 - \frac{\mu'}{y'} \right), \\ a_0 a_{24} &= \frac{\alpha t}{4yy'} (1 + x\mu) \left( 1 + \frac{x'\mu'}{t} \right), \\ a_0 a_{12} &= \frac{\alpha t}{4yy'} (1 - x\mu) \left( 1 + \frac{x'\mu'}{t} \right), \\ a_0 a_{34} &= \frac{\alpha t}{4yy'} (1 + x\mu) \left( 1 - \frac{x'\mu'}{t} \right), \\ a_0 a_{13} &= \frac{\alpha t}{4yy'} (1 - x\mu) \left( 1 - \frac{x'\mu'}{t} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

С помощью метода вспомогательного грассмано-ва поля [5] статистическую сумму ОМИ на плоской  $L \times M$  решетке с периодическими граничными условиями можно представить в виде суммы четырех ин-

тегралов по четырехкомпонентному грассмановому полю:

$$Z = \text{Tr}(T^M) = (2a_0)^{ML} \frac{1}{2} (Q^{aa} + Q^{ap} + Q^{pa} - Q^{pp}), \quad (6)$$

где

$$Q = \int d[\psi] e^{S[\psi]}, \quad d[\psi] = \prod_r \prod_{j=1}^4 d\psi_r^j, \quad (7)$$

$r = (x, y)$  — координаты узлов решетки;  $x = 1, 2, \dots, \dots, L$ ;  $y = 1, 2, \dots, M$ . Действие  $S[\psi]$  имеет следующий вид:

$$S[\psi] = \frac{1}{2} (\psi \hat{D} \psi) + g \sum_r \psi_r^1 \psi_r^2 \psi_r^3 \psi_r^4, \quad (8)$$

где  $\hat{D}$  — решеточный аналог оператора Дирака

$$\hat{D} = \hat{a} + \hat{v}, \quad (9)$$

матрицы  $\hat{a}$  и  $\hat{v}$  — антисимметричны:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & -a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & -a_{24} \\ a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla_{-x} & \nabla_{-x} \nabla_{-y} & \nabla_{-y} \\ \nabla_x & 0 & \nabla_{-y} & \nabla_x \nabla_{-y} \\ -\nabla_x \nabla_y & -\nabla_y & 0 & -\nabla_x \\ -\nabla_y & -\nabla_{-x} \nabla_y & \nabla_{-x} & 0 \end{pmatrix},$$

$\nabla_x, \nabla_y$  — операторы сдвига на 1 шаг решетки в горизонтальном и вертикальном направлениях, соответственно:

$$\nabla_x \psi(x, y) = \psi(x+1, y), \quad \nabla_y \psi(x, y) = \psi(x, y+1),$$

$$\nabla_x^T = \nabla_{-x} = \nabla_x^{-1}, \quad \nabla_y^T = \nabla_{-y} = \nabla_y^{-1}.$$

Верхние индексы у слагаемых в правой части (6) указывают на тип граничных условий для операторов сдвига: “p” — периодические, “a” — антипериодические, а именно,

$$(\nabla_x^p)^L = 1, \quad (\nabla_x^a)^L = -1, \quad (\nabla_y^p)^M = 1, \quad (\nabla_y^a)^M = -1.$$

Константа  $g$  перед квартичным членом в действии (8) следующим образом выражается через параметры больцмановских весов (4):

$$g = a_4 - a_{12} a_{34} + a_{13} a_{24} - a_{14} a_{23}. \quad (10)$$

Если параметры задачи таковы, что  $g = 0$  (условие свободных фермионов), то квартичный член в действии (8) исчезает, и интегралы (7) выражаются через пфаффианы матрицы  $\hat{D}$ . Представление (6) совпадает по форме с классическим решением двумерной модели Изинга методом пфаффианов [9] и воспроизводит соответствующий результат в этом частном случае.

Нетрудно убедиться, что параметры (5) ББС модели удовлетворяют условию свободных фермионов  $g = 0$ . Поэтому и статистическая сумма этой модели, и все собственные значения трансфер-матрицы вычисляются элементарно.

Обозначим через  $D_{qp}$  фурье-преобразование ( $\nabla_{\pm x} \rightarrow e^{\pm iq}, \nabla_{\pm y} \rightarrow e^{\pm ip}$ ) матрицы  $\hat{D}$  (9). Тогда

$$Q = \text{Pf}(\hat{D}) = \prod_{qp} |D_{qp}|^{1/2}, \quad (11)$$

где  $q, p$  — компоненты квазиимпульса, пробегающие (полу-)целочисленные значения (в единицах  $2\pi/L$  и  $2\pi/M$  соответственно) в зоне Бриллюэна в зависимости от (анти-)периодических граничных условий. (Далее для краткости — просто “(анти-)периодический” спектр).

Определитель  $4 \times 4$  матрицы  $D_{qp}$  имеет следующий вид

$$d_{qp} = |D_{qp}| = C_1 + C_2 \cos q + C_3 \cos p + C_4 \cos q \cdot \cos p + C_5 \sin q \cdot \sin p, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{4} (d_{00} + d_{0\pi} + d_{\pi 0} + d_{\pi\pi}), \\ C_2 &= \frac{1}{4} (d_{00} + d_{0\pi} - d_{\pi 0} - d_{\pi\pi}), \\ C_3 &= \frac{1}{4} (d_{00} - d_{0\pi} + d_{\pi 0} - d_{\pi\pi}), \\ C_4 &= \frac{1}{4} (d_{00} - d_{0\pi} - d_{\pi 0} + d_{\pi\pi}), \\ C_5 &= -C_4 \text{ при } (a_{12}, a_{23}, a_{24}) \rightarrow -(a_{12}, a_{23}, a_{24}); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} d_{00} &= (1 + a_4 - a_{12} - a_{34} + a_{14} + a_{23} + a_{13} + a_{24})^2, \\ d_{0\pi} &= (1 + a_4 - a_{12} - a_{34} - a_{14} - a_{23} - a_{13} - a_{24})^2, \\ d_{\pi 0} &= (1 + a_4 + a_{12} + a_{34} + a_{14} + a_{23} - a_{13} - a_{24})^2, \\ d_{\pi\pi} &= (1 + a_4 + a_{12} + a_{34} - a_{14} - a_{23} + a_{13} + a_{24})^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим, что критическая поверхность в пространстве параметров  $a_{ik}$  определяется обращением в нуль правой части любого из уравнений (14).

Для ББС модели, используя (5), имеем

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\alpha^2}{2a_0^2 y^2 y'^2} (y^2 y'^2 + x^2 x'^2 \mu^2 \mu'^2 + t^2 (1 + \mu^2 \mu'^2)), \\ C_2 &= \frac{\alpha^2}{a_0^2 y^2 y'^2} (xx'yy' - t^2) \mu \mu', \\ C_3 &= \frac{\alpha^2}{2a_0^2 y^2 y'^2} (y^2 y'^2 + x^2 x'^2 \mu^2 \mu'^2 - t^2 (1 + \mu^2 \mu'^2)), \\ C_4 &= \frac{\alpha^2}{a_0^2 y^2 y'^2} (xx'yy' + t^2) \mu \mu', \\ C_5 &= \frac{\alpha^2}{a_0^2 y^2 y'^2} (xy + x'y') t \mu \mu'. \end{aligned}$$

По одной из компонент квазиимпульса в (11) произведение выполняется явно. Для этого представим определитель (12) в факторизованном виде

$$\begin{aligned} 4 d_{qp} &= 2u_q - v_q e^{ip} - v_{-q} e^{-ip} = \\ &= \rho_q (1 - \nu_q e^{ip}) (1 - \nu_{-q} e^{-ip}), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} u_q &= 2(C_1 + C_2 \cos q), \quad \rho_q = u_q + \sqrt{u_q^2 - v_q v_{-q}}, \\ v_q &= -2(C_3 + C_4 \cos q - iC_5 \sin q), \quad \nu_q = v_q / \rho_q. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} &2^{LM} \prod_{qp} |D_{qp}|^{1/2} = \\ &= \prod_q \rho_q^{M/2} \left( \prod_p (1 - \nu_q e^{ip}) (1 - \nu_{-q} e^{-ip}) \right)^{1/2} = \\ &= \prod_q \rho_q^{M/2} (1 \pm \nu_q^M), \end{aligned} \quad (17)$$

где знак “+” в правой части (17) появляется в случае антипериодического спектра для  $p$ , а знак “-” – в случае периодического.

Введем для каждой из пар слагаемых в (6) обозначения

$$\begin{aligned} (2a_0)^{LM} \frac{1}{2} (Q^{aa} + Q^{ap}) &= Z^a, \\ (2a_0)^{LM} \frac{1}{2} (Q^{pa} - Q^{pp}) &= Z^p, \end{aligned} \quad (18)$$

где верхние индексы в правых частях обозначают тип граничных условий по  $x$ -координате: “а” соответствует антипериодическому спектру

$q$ -компоненты импульса, “р” – периодическому. В результате имеем:

$$\begin{aligned} Z^a &= (\lambda^a)^M \frac{1}{2} \left( \prod_q (1 + \nu_q^M) + \prod_q (1 - \nu_q^M) \right), \\ \lambda^a &= (a_0)^L \prod_q \rho_q^{1/2}, \quad \frac{Lq}{2\pi} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}; \\ Z^p &= (\lambda^p)^M \frac{1}{2} \left( \prod_q (1 + \nu_q^M) - \prod_q (1 - \nu_q^M) \right), \\ \lambda^p &= (a_0)^L \prod_q \rho_q^{1/2}, \quad \frac{Lq}{2\pi} \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (19)$$

Раскрывая произведения в (19), получим

$$\begin{aligned} Z^a &= (\lambda^a)^M \left( 1 + \sum_{q_1 < q_2} (\nu_{q_1} \nu_{q_2})^M + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{q_1 < \dots < q_4} (\nu_{q_1} \nu_{q_2} \nu_{q_3} \nu_{q_4})^M + \dots \right), \\ Z^p &= (\lambda^p)^M \left( \sum_q \nu_q^M + \sum_{q_1 < q_2 < q_3} (\nu_{q_1} \nu_{q_2} \nu_{q_3})^M + \dots \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Сумма этих выражений должна совпадать с разложением следа от  $M$ -той степени трансфер-матрицы по ее собственным значениям, то есть

$$\text{Tr}(T^M) = Z^a + Z^p = \lambda_1^M + \lambda_2^M + \dots + \lambda_{2^L}^M$$

для любых  $M$ , в частности, – вплоть до  $M = 2^L$ . Эта система  $2^L$  уравнений относительно собственных значений  $\lambda_k$  имеет единственное (с точностью до перенумерации) решение  $(\lambda^{a,p} \prod_{k=1}^n \nu_{q_k})$ . Из определений (16) для величин  $\nu_q$  нетрудно видеть, что  $|\nu_q| < 1$  при  $L \neq \infty$ . Поэтому максимальное собственное значение – это  $\lambda^a$  (19).

Представление (20) дает не только явные выражения для всех  $2^L$  собственных значений трансфер-матрицы, но и очевидным образом задает классификацию собственных векторов. Во-первых, из (20) видно, что собственные значения характеризуются определенным количеством импульсов и конкретными их значениями, что является следствием трансляционной инвариантности системы. Во-вторых, они разбиваются на два семейства: первое – с четным числом импульсов (“частиц”) с антипериодическим спектром –  $\lambda^a(q_1, \dots, q_{2n})$ , включая “вакуум”  $\lambda^a(\emptyset) = \lambda^a$ , второе – с нечетным числом частиц и периодическим спектром для импульсов –  $\lambda^p(q_1, \dots, q_{2n+1})$ , включая “одночастичное” состояние

$$\lambda^p(q) = \lambda^p \nu_q = \lambda^p \cdot e^{-\gamma_q + i\Theta_q}.$$

Здесь мы ввели обозначения

$$u_q/|v_q| = \cosh \gamma_q, \quad \Theta_q = \arg(v_q). \quad (21)$$

Используя их, выпишем окончательные выражения для собственных значений трансфер-матрицы:

$$\begin{aligned} & \lambda^a(q_1, \dots, q_{2n}) = \\ & = \lambda^a \exp \left\{ \sum_{k=1}^{2n} (-\gamma_{q_k} + i\Theta_{q_k}) \right\}, \quad \frac{Lq_k}{2\pi} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda^p(q_1, \dots, q_{2n+1}) = \\ & = \lambda^p \exp \left\{ \sum_{k=1}^{2n+1} (-\gamma_{q_k} + i\Theta_{q_k}) \right\}, \quad \frac{Lq_k}{2\pi} \in \mathbb{Z}. \quad (23) \end{aligned}$$

Появление фазы  $\Theta_q$  в выражениях (22) и (23) для собственных значений указывает на то, что система эволюционирует не только во “временном”, но также и в “пространственном” направлениях. Фаза  $\Theta_q$  исчезает, если коэффициент  $C_5$  в (12) равен нулю, что накладывает определенную связь на параметры больцмановских весов (4). Как видно из (22) и (23), при  $\Theta_q = 0$  спектр собственных значений, соответствующих многочастичным состояниям, сильно вырожден, поскольку  $\gamma_q = \gamma_{-q}$  и, следовательно,  $\sum \gamma_{q_k}$  может быть одинакова при различных наборах импульсов. Если же  $\Theta_q \neq 0$ , вырождение снимается, что может быть полезным для вычисления собственных векторов и формфакторов.

Прежде чем выписать формулы для собственных значений трансфер-матрицы в параметрах (2) и (5) ББС модели, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_q &= 1 - 2\mu\mu' \cos q + \mu^2\mu'^2, \\ B_q &= \mu\mu'(x + x'y') \sin q, \\ C_q &= y^2y'^2 + 2xx'\mu\mu'yy' \cos q + x^2x'^2\mu^2\mu'^2, \\ D_q &= A_q C_q - B_q^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_q &= \frac{\alpha^2}{a_0^2 y^2 y'^2} (A_q t^2 + C_q), \\ u_q^2 - v_q v_{-q} &= \frac{4\alpha^4 t^2}{a_0^4 y^4 y'^4} D_q. \end{aligned} \quad (25)$$

Из (16), (25) следует, что  $a_0^2 \rho_q$  является квадратичным полиномом по  $t$ :

$$\begin{aligned} a_0^2 \rho_q &= \frac{\alpha^2}{y^2 y'^2} (A_q t^2 + C_q + 2t\sqrt{D_q}) = \\ &= \frac{\alpha^2}{y^2 y'^2} A_q (t + t_q)(t + t_{-q}) \end{aligned} \quad (26)$$

с корнями  $-t_q$  и  $-t_{-q}$ , где

$$t_q = \frac{1}{A_q} (\sqrt{D_q} - iB_q). \quad (27)$$

Знак перед корнем  $\sqrt{D_q}$  фиксируется условиями

$$\begin{aligned} \sqrt{D_q} &= \sqrt{D_{-q}}, \quad q \neq 0, \pi, \\ \sqrt{D_0} &= (\mu\mu' - 1)(yy' + xx'\mu\mu'), \\ \sqrt{D_\pi} &= (\mu\mu' + 1)(yy' - xx'\mu\mu'). \end{aligned}$$

Поскольку функция  $a_0^2 v_q = a_0^2 \rho_q \nu_q$  в обозначениях (24) имеет вид

$$\begin{aligned} a_0^2 \rho_q \nu_q &= \frac{\alpha^2}{y^2 y'^2} (A_q t^2 - C_q + 2i t B_q) = \\ &= \frac{\alpha^2}{y^2 y'^2} A_q (t - t_q)(t + t_{-q}), \end{aligned} \quad (28)$$

то из (26) и (28) легко устанавливается следующее соотношение:

$$\nu_q = \frac{t - t_q}{t + t_q}.$$

Окончательно формулы для собственных значений трансфер-матрицы принимают вид

$$\lambda^a(q_1, \dots, q_{2n}) = \lambda^a \prod_{k=1}^{2n} \frac{t - t_{q_k}}{t + t_{q_k}}, \quad \frac{Lq_k}{2\pi} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \quad (29)$$

$$\lambda^p(q_1, \dots, q_{2n+1}) = \lambda^p \prod_{k=1}^{2n+1} \frac{t - t_{q_k}}{t + t_{q_k}}, \quad \frac{Lq_k}{2\pi} \in \mathbb{Z}, \quad (30)$$

где  $t_{q_k}$  определяются формулой (27), а

$$\begin{aligned} \lambda^a &= \frac{\alpha^L (1 + \mu^L \mu'^L)}{y^L y'^L} \prod_q (t + t_q), \\ \lambda^p &= \frac{\alpha^L (1 - \mu^L \mu'^L)}{y^L y'^L} \prod_q (t + t_q). \end{aligned}$$

Подобное выражение для собственных значений было получено в частном случае  $x' = x$ ,  $y' = y$  и  $\mu' = \mu$  в работе [6] с использованием метод функциональных соотношений. Однако еще раз отметим, что в отличие от этого метода, позволяющего дать лишь возможные собственные значения трансфер-матрицы (без указания их кратности: 0, 1 или больше), описанный в данной работе метод, как видно из приведенных выше формул, дает набор собственных значений однозначно.

Работа выполнена при поддержке гранта INTAS # 03-51-3350, гранта Украинско-французского проекта "Днипро" и гранта Фонда фундаментальных исследований Украины # 2.7/00152.

- 
1. R. J. Baxter, J. Stat. Phys. **57**, 1 (1989).
  2. V. V. Bazhanov and Yu. G. Stroganov, J. Stat. Phys. **59**, 799 (1990).
  3. R. J. Baxter, V. V. Bazhanov, and J. H. H. Perk, Int. J. Mod. Phys. B **4**, 803 (1990).
  4. R. J. Baxter, Phys. Rev. Lett. **94**, 130602 (2005).
  5. A. I. Bugrij, in *Electron-Electron Correlation Effects in Low-Dimensional Conductors and Superconductors*, Eds. A. A. Ovchinnikov and I. I. Ukrainskii, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991, p.135.
  6. H. Au-Yang, B.-Q. Jin, and J. H. H. Perk, J. Stat. Phys. **102**, 471 (2001).
  7. R. J. Baxter, J. Stat. Phys. **117**, 1 (2004).
  8. Р. Бэксстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, М.: Мир, 1985. (Rodney J. Baxter F.R.S., *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, 1982.)
  9. В. М. McCoy and Т. Т. Wu, *The Two-Dimensional Ising Model*, Harvard University Press, Cambridge, 1973.