Письма в ЖЭТФ, том 40, вып. 4, стр. 155 – 158 *25 августа 1984 г.*

ГАРМОНИЧЕСКОЕ СУПЕРПРОСТРАНСТВО – КЛЮЧ К $N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫМ ТЕОРИЯМ

А.Гальперин [1], *Е.Иванов, В.Огиевецкий, Э.Сокачев* [2]

Вводится понятие гармонического $N = 2$ суперпространства с дополнительными координатами, связанными со сферой $SU(2)/U(1)$. В его рамках $N = 2$ теории материи, Янга – Миллса и супергравитации имеют адекватное геометрическое описание на языке суперполей без связей. Обнаружено новое явление – неограниченность числа калибровочных и вспомогательных степеней свободы.

1. До сих пор не удавалось явно ковариантным геометрическим образом построить в терминах суперполей, не ограниченных связями, расширенные суперсимметричные теории (Янга – Миллса, супергравитации и материи). Частичный успех был достигнут в негеометрическом подходе к абелевой теории Янга – Миллса [1] (ЯМ) и в его обобщении (в виде рекуррентной процедуры) на неабелев случай [2]. Вместе с тем, необходимость такого построения представляется сейчас насущной во многих планах, прежде всего в связи с замечательным свойством конечности ряда суперсимметричных моделей теории поля.

2. В настоящей работе проводится такое построение. Оно основано на введении гармонических переменных $u^{\pm}_i$, координат сферы $SU(2)/U(1)$, вдобавок к обычным четным координатам. $u^{\pm}_i$ являются диадами; они снабжены двумя сортами индексов, индексом $SU(2)$ (i) и индексом $U(1)$ $(\pm)$, и осуществляют мост между этими группами. Учитывая условие нормировки

$$u^{+i}u^{-}_{i} = 1. \tag{1}$$

можно обратимо перевести обычные спинорные координаты θ^i_α, $\bar\theta^i_{\dot\alpha}$ с индексами i группы $SU(2)$ в спинорные координаты $\theta^{\pm}_\alpha$, $\bar\theta^{\pm}_{\dot\alpha}$ с индексами $\pm$ группы $U(1)$:

$$\theta^{\pm}_\alpha = \theta^i_\alpha u^{\pm}_i\,, \qquad \bar\theta^{\pm}_{\dot\alpha} = \bar\theta^i_{\dot\alpha} u^{\pm}_i \tag{2}$$

$$\theta^i_\alpha = u^{+i}\theta^-_\alpha - u^{-i}\theta^+_\alpha\,, \qquad \bar\theta^i_{\dot\alpha} = u^{+i}\bar\theta^-_{\dot\alpha} - u^{-i}\bar\theta^+_{\dot\alpha}\,. \tag{3}$$

Ключевым обстоятельством служит замкнутость подпространства (не включающего координат θ^-_α, $\bar\theta^-_{\dot\alpha}$)

$$\{\zeta_A = (x^m_A\,,\ \theta^+_\alpha, \bar\theta^+_{\dot\alpha}),\ u^{\pm}\}\,, \qquad x^m_A = x^m - 2i\theta^{(i}\sigma^m\bar\theta^{j)}u^+_k u^-_j \tag{4}$$

относительно преобразований $N = 2$ суперсимметрии:

$$\delta x^m_A = -\,2i(\epsilon^k\sigma^m\bar\theta^+ + \theta^+\sigma^m\bar\epsilon^k)u^-_k\,, \tag{5}$$
$$\delta\theta^+_\alpha = \epsilon^i_\alpha u^+_i\,, \quad \delta\bar\theta^+_{\dot\alpha} = \bar\epsilon^i_{\dot\alpha}u^+_i\,, \quad \delta u^{\pm} = 0\,.$$

Мы будем называть (4) аналитическим суперпространством $N = 2$ суперсимметрии, а определенные на нем суперполя $\Phi^{(q)}(\zeta_A, u)$ – аналитическими. $\Phi^{(q)}(\zeta_A u)$ как целое есть представление $U(1)$ с зарядом q. Его компоненты имеют заряды в интервале от q до $q - 4$ в зависимости от числа $\theta^+, \bar\theta^+$ в данном члене разложения. Каждая компонента в свою очередь есть функция от новых координат $u^{\pm}_i$, допускающая бесконечное разложе-

[1] Институт ядерной физики, Ташкент.

[2] Институт ядерных исследований и ядерной энергии, София.

ние типа

$$F^{(q)}(x_A, u^{\pm}) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(i_1 \dots i_{n+q} j_1 \dots j_n)}(x_A)\, u^+_{i_1} \dots u^+_{i_{n+q}} u^-_{j_1} \dots u^-_{j_n} . \qquad (6)$$

В разложении $\Phi^{(q)}$ заряды группы $U(1)$ несут только гармонические переменные, диады $u^{\pm}_i$ (и содержащие их спинорные координаты θ^+, $\bar{\theta}^+$). Замечательно, что компонентные поля $f^{(i_1 \dots i_n)}(x_A)$ суть представления группы $SU(2)$ и скаляры по $U(1)$! Этот факт объясняется тем, что фактически разложение (6) есть гармоническое разложение на однородном пространстве, сфере $SU(2)/U(1)$ [3]. Анализ показывает, что из двух квантовых чисел $N=2$ суперсимметрии, первое – суперспин – одинаков у всех членов разложения и равен нулю для скалярных аналитических суперполей с $U(1)$ – зарядом q, тогда как второе – суперизоспин I принимает значения

$$\Phi^{(q)}(\zeta_A, u): \qquad I = \left|\frac{q}{2} - 1\right| + n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad . \qquad (7)$$

Подчеркнем также, что можно определить ковариантную гармоническую производную D^{++} такую, что действуя на аналитическое суперполе, она оставляет его аналитическим и совместна с нормировкой (1) :

$$D^{++}\Phi^{(q)} = \left(u^{+i}\frac{\partial}{\partial u^{-i}} - 2i\theta^+ \sigma^m \bar{\theta}^+ \frac{\partial}{\partial x^m_A}\right)\Phi^{(q)} . \qquad (8)$$

Нам удалось, таким образом, так обобщить грассманову аналитичность [4], что сохранилась симметрия $SU(2)$! Аналитические переменные из [4] получаются из (2) при частном выборе $u^{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $u^{+2} = -\frac{i}{\sqrt{2}}$. Мы уже получили ранее и координату вида x^m_A из (4), см. базисы в [5]. Важно, что имеется операция $*$, являющаяся произведением комплексного сопряжения – и операции $*$

$$* \quad u^{\pm i} \to \pm u^{\mp i}, \qquad (9)$$

отображающей аналитическое подпространство в себя, и позволяющая определять аналитические вещественные суперполя. При построении действия понадобится интеграл по аналитическому суперпространству. Интеграл по гармоническим координатам определяется правилами:

$$\int du \cdot 1 = 1, \int du\, u^{(+i_1} \dots u^{+i_p} u^{-j_1} \dots u^{-j_q)} = 0, \quad p + q > 0. \qquad (10)$$

Элемент объема есть $d\zeta_A^{(-4)} du = d^4 x_A\, d^2\theta^+ d^2\bar{\theta}^+ du$.

3. Приступим теперь к построению $N=2$ суперсимметричных теорий. Рассмотрим сначала гипермультиплет материи Файе – Сониуса [6, 7]. Он имеет суперспин 0 и суперизоспин 1/2. В соответствии с (7), простейшим суперполем, его содержащим, будет аналитическое суперполе q^+. Действие для него записывается в виде [3)]:

$$S = \int d\zeta_A^{(-4)} du\, [\,\overset{*}{\bar{q}}{}^+ D^{++} q^+ + \frac{\lambda}{2}(\overset{*}{\bar{q}}{}^+)^2 (q^+)^2] + \text{э.с.} \qquad (11)$$

и влечет за собой уравнения движения

$$D^{++} q^+ = -\overset{*}{\bar{q}}{}^+ (q^+)^2 . \qquad (12)$$

---

3) Самодействие может включать и другие члены. Оно легко обобщается на случай нескольких гипермультиплетов.

Изучая суперполе q^+, мы встречаем кардинально новое явление. Согласно (7), q^+ содержит бесконечное число вспомогательных полей, входящих в супермультиплеты с суперспином 0, и с бесконечно растущими суперизоспинами 1/2, 3/2, ... Из уравнений движения (12) следует, что все поля с суперизоспином, превышающим 1/2, равны нулю в свободном случае ($\lambda = 0$) и выражаются через поля с суперизоспином 1/2 при $\lambda \neq 0$.

Аналогичная ситуация возникает и для другого типа гипермультиплета [8]. Он имеет суперизоспин 1 и суперспин 0 и описывается аналитическим суперполем ω, содержащим согласно (7), суперспины 1, 2, ... Действие для ω в свободном случае записывается

$$S_0 = \int d\zeta_A^{(-4)} du\, D^{++} \omega D^{++} \omega \tag{13}$$

и анализ уравнений движения $(D^{++})^2 \omega = 0$ показывает, что бесконечный набор вспомогательных супермультиплетов с суперизоспинами $\geqslant 2$ на массовой оболочке обращается в ноль. Легко построить взаимодействие, например, вида

$$S_{int+0} = \int d\zeta_A^{(-4)} du g^{ab}(\kappa\omega) D^{++} \omega_a D^{++} \omega_b , \tag{14}$$

где $g^{ab}(\kappa\omega)$ – "метрика", κ – константа связи. В [8] фактически использовалась связь (на нашем языке) $(D^{++})^3 \omega = 0$, совместная только со свободными уравнениями движения.

4. $N=2$ ЯМ теория до сих пор была известна в компонентном виде [9,6], в виде суперполевой теории со связями [10 4)] и в негеометрическом описании с препотенциалами высокой размерности [1,2]. ЯМ $N=2$ супермультиплет содержит векторное поле $A_a(x)$ скалярные поля $M(x)$, $N(x)$ и триплет $D_{ij}(x)$ и майорановский изодублет $\Psi^i_\alpha(x)$, $\bar{\Psi}_{\dot{\alpha} i}(x)$. Его суперспин и суперизоспин равны нулю. Такой супермультиплет можно описать суперполем V^{++} (суперспин 0, суперизоспины 0, 1, ...). Лишние суперизоспины обезвреживаются калибровочными преобразованиями:

$$(V^{++})' = \frac{1}{ig} e^{i\omega} (D^{++} + igV^{++}) e^{-i\omega} , \qquad \begin{array}{l} V^{++} = V_i^{++} T_i , \\ \omega = \omega_i T_i , \end{array} \tag{15}$$

где T_i – генераторы группы внутренней симметрии. Преобразование (15) буквально копирует преобразование из обычной теории ЯМ ($N=0$) : производная $\partial/\partial x^m$ заменена на производную D^{++}, связность V_m на связность V^{++}, калибровочная функция $\omega(x)$ на калибровочное аналитическое суперполе $\omega(\zeta_A, u)$. Замечательно новое явление – теперь мы имеем бесконечное число калибровочных степеней свободы. Мы оставим обсуждение действия для более подробной статьи, здесь отметим только, что включение взаимодействия с материальными полями также осуществляется просто: нужно удлинить гармоническую производную, $D^{++} \to D^{++} + igV^{++}$ в (11), (13) и (14).

5. $N = 2$ СГ Эйнштейна. Фундаментальная калибровочная группа выбирается из требования сохранения аналитических представлений, подобно тому как в $N=1$ она выбиралась из требования сохранения киральности [13]. К аналитическим координатам в данном случае необходимо добавить координату центрального заряда x^5_A (чтобы описать гравифотон). Калибровочная группа реализуется как группа общекоординатных преобразований в $\{\zeta^M_A, x^5_A, u^\pm\}$ оставляющая инвариантным подпространство $\{\zeta^M_A, u^\pm\}$:

$$\delta\zeta^M_A = \lambda^M(\zeta_A, u), \quad \delta x^5_A = \lambda^5(\zeta_A, u). \tag{16}$$

Гармонические переменные $u^\pm_i$ по-прежнему претерпевают лишь глобальные $SU(2)$- и $U(1)$-повороты. Основными геометрическими величинами теории служат ++ компоненты ана-

4) В работе Рослого [11] переменные типа u_i использовались при анализе связей $N=2$ ЯМ теории в духе работы Уорда [12].

литического репера

$$V^{++M} = V^{++M}(\zeta_A, u), \qquad V^{++5} = V^{++5}(\zeta_A, u) \tag{17}$$

со следующими трансформационными законами:

$$\delta V^{++M,5} = V^{++M,5\prime}(\zeta'_A, u) - V^{++M,5}(\zeta_A, u) = D^{++}\lambda^{M,5}(\zeta_A, u), \tag{18}$$

где

$$D^{++} = u^{+i}\frac{\partial}{\partial u^{-i}} + V^{++M}(\zeta_A, u)\frac{\partial}{\partial \zeta^M_A} + V^{++5}(\zeta_A, u)\frac{\partial}{\partial x^5_A} \tag{19}$$

— ковариантизованная версия производной (8). Можно показать, что в калибровке Весса – Зумино компонентный состав $V^{++M,5}$ точно совпадает с составом мультиплета $N = 2$ СГ Эйнштейна (в ее первоначальном варианте [14]). Дифференциальная геометрия может быть построена по аналогии со случаем $N = 2$ ЯМ. Все связи опять решаются в терминах пре-препотенциалов $V^{++M,5}(\zeta_A, u)$.

6. Таким образом, все расширенные $N = 2$ суперсимметрические теории допускают явно ковариантную формулировку без наложения каких либо связей. Если $N = 1$ суперсимметрия потребовала комплексификации, то в случае $N = 2$ возникла "гармонизация". Радикально новое явление, вскрытое в этом случае, состоит в бесконечности числа калибровочных или (и) вспомогательных степеней свободы. Нам кажется, что это явление носит общий характер и объясняет истоки известных теорем о невозможности найти конечное число вспомогательных полей в $N = 4$ теориях, которые ждут своей разработки. Авторам приятно выразить сердечную благодарность С.Н.Калицину и Б.М.Зупнику за полезные обсуждения.

Литература

1. *Мезинческу Л.* Препринт ОИЯИ, Р2-12572, Дубна, 1979.
2. *Howe P.S., Stelle K.S., Townsend P.K.* Preprint ICTP/82-83/20.
3. *Salam A., Strathdee J.* Ann. Phys., 1982, **141**, 316.
4. *Гальперин А.С., Иванов Е.А., Огиевецкий В.И.* Письма в ЖЭТФ, 1981, **33**, 176.
5. *Гальперин А.С., Иванов Е.А., Огиевецкий В.И.* ЯФ, 1982, **35**, 790.
6. *Fayet P.* Nucl. Phys., 1976, **B113**, 135.
7. *Sohnius M.F.* Nucl. Phys., 1978, **B138**, 109.
8. *Howe P.S., Stelle K.S., Townsend P.K.* Nucl. Phys., 1983, **B214**, 519.
9. *Ferrara S., Zumino B.* Nucl. Phys., 1974, **B79**, 413.
10. *Grimm R., Sohnius M., Wess J.* Nucl. Phys., 1978, **B133**, 275.
11. *Рослый А.* В Трудах Международного семинара "Теоретико-групповые методы в физике (Звенигород, 1982), М.: Наука, 1, с. 263.
12. *Ward R.S.* Phys. Lett., 1977, **61A**, 81.
13. *Ogievetsky V., Sokatchev E.* Phys. Lett., 1978, **79B**, 222; ЯФ, 1978, **28**, 1631; 1980, **31**, 264; *Siegel W., Gates S.J.* Nucl. Phys., 1979, **B147**, 77.
14. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.* Phys. Lett., 1979, **85B**, 47; *de Wit B., Holten J.W., Van Proeyen A.* Nucl. Phys., 1980, **B167**, 186.

Объединенный
институт ядерных исследований

Поступила в редакцию
29 мая 1984 г.