Письма в ЖЭТФ, том 40, вып. 4, стр. 168 – 170 *25 августа 1984 г.*

СУПЕРПОЛЕВОЕ ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ $N = 1$ СУПЕРГРАВИТАЦИИ

В.Г.Зима

Предложена новая формулировка $N = 1$ супергравитации со вспомогательным суперполем, включающая в себя как частные случаи все известные формулировки.

В суперполевом описании $N = 1$ супергравитации (СГ) основными объектами являются: 1) вещественное супермногообразие $\Omega^{4,4}$, локально параметризуемое четырьмя обычными x^m и четырьмя антикоммутирующими θ^μ, $\bar\theta_{\dot\mu}$ координатами (в совокупности – z^M), которое будем называть физическим суперпространством (СП), и 2) заданная на $\Omega^{4,4}$ связность со значениями в алгебре спинорного расширения группы Пуанкаре. Чтобы киральные суперполя глобальной суперсимметрии имели соответствующие локальные аналоги, на связность необходимо наложить связи первого рода [1]: $T_{\alpha\beta}{}^c = T_{\alpha\beta}{}^{\dot\gamma} = 0$ [1)]. Для исключения из рассмотрения суперполей, не являющихся необходимыми, налагаются конвенциональные связи, выбор которых диктуется соображениями удобства, скажем $T_{\alpha\dot\beta}{}^c = 2i\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^c$ (конечно [2], это условие не "чисто" конвенциональное), $T_{\alpha\dot\beta}{}^\gamma = T_{\alpha b}{}^c(\tilde\Sigma_c{}^b)_{\dot\beta}{}^{\dot\gamma} = 0$ и $R_{\alpha\dot\beta} = 0$. Специфика, рассматриваемой СГ, закладывается в связи третьего типа, посредством которых завершается исключение лишних суперполей: для минимальной СГ – это $T_\alpha \equiv T_{\alpha b}{}^b = 0$, для неминимальной СГ – это $1/3 R_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} - \bar\zeta D^\alpha T_\alpha - \bar\zeta^2 T^\alpha T_\alpha = 0$, где $\zeta = n + 1/3n + 1$, n – комплексный параметр Зигеля [3]. Одновременно с решением указанных задач наложение связей исключает из теории высшие спины.

Удобно разрешить связи первого рода (для минимальной СГ это детально проделано в [4]). В общем случае, вследствие решения связей первого рода, возникает подход, предложенный и подробно разработанный Огиевецким и др. [5]. В нем физическое СП $\Omega^{4,4}$ является гиперповерхностью в комплексном СП $\mathbb{C}^{4,4} = \{z^M_L\} = \{x^m_L, \theta^\mu_L, \bar\varphi^L_{\dot\mu}\}$, которая получается деформацией вещественной гиперплоскости $\mathbb{R}^{4,4}$; координаты точек $\Omega^{4,4}$ в факторпространстве $\mathbb{C}^{4,4}/\mathbb{R}^{4,4}$ – произвольные функции вещественных координат в $\mathbb{R}^{4,4}$: $x^m_L = x^m + i\mathcal{H}^m(z)$, $\theta^\mu_L = \theta^\mu$, $\bar\varphi^L_{\dot\mu} = \bar\theta_{\dot\mu} + \bar H_{\dot\mu}(z)$. Суперполя $\mathcal{H}^m$ (вещественное) и H^μ, которые определяют вложение $\Omega^{4,4}$ в $\mathbb{C}^{4,4}$, играют роль предпотенциалов. В $\mathbb{C}^{4,4}$ действует группа аналитических преобразований "треугольного" вида, по определению оставляющая инвариантным киральное подпространство $\mathbb{C}^{4,2} = \{z^M_L\} = \{x^m_L, \theta^\mu_L\}$: $z'_L = z_L + \lambda(z_L)$, $\bar\varphi'_L = \bar\varphi_L + \bar\rho(z_L)$. Эти преобразования индуцируют на $\Omega^{4,4}$, как на гиперповерхности, группу СГ – конформной, в отсутствие ограничений, и эйнштейновской, если ограничиться подгруппой удовлетворяющей условию, которое удобно записать в виде

$$I^\zeta \bar\Lambda^{-1} = 1. \qquad (1)$$

Здесь $I = \mathrm{Ber}(\partial z'_L / \partial z_L)$, $\bar\Lambda = \det(\partial\bar\varphi'_L / \partial\bar\varphi_L)$. Для невещественных ζ это условие в правых (сопряженных) координатах записывается через $\bar\zeta \neq \zeta$, поэтому левые и правые координаты оказываются неравноправными. Это означает, что для невещественных ζ в $N = 1$ СГ P- и C-инвариантности не имеют места. CP-инвариантность не нарушена.

Фиксируя калибровку относительно локальных лоренцевых преобразований, спинорную ковариантную производную скалярных суперполей можно записать в виде $\nabla_\alpha = F\partial/\partial\varphi^\alpha_R$, где F – суперполе, которое вместе с условиями вложения определяет связь производных ∇_α с обычными ∂_M. Теперь связи второго рода выражают реперные коэффициенты и коэффициенты связности в терминах функций вложения, F и $\bar F$.

---

1) Нам удобно поменять местами связи первого и второго рода в классификации [1].

Связи третьего рода играют двоякую роль. Во-первых, они ограничивают группу аналитических треугольных преобразований СП $\mathbb{C}^{4,4}$ подгруппой (1). Во-вторых – выражают F и $\bar{F}$ в терминах функций вложения.

Оказывается, что постулируя ограничение (1) на группу в $N=1$ СГ можно отказаться от наложения связей третьего рода. При этом суперполя F и $\bar{F}$ становятся вспомогательными. Действительно, запишем интеграл действия в виде

$$A(n) = \frac{1}{2\kappa^2}\left\{\int d^8 z\, \hat{c}^{-1}\, |F|^{-4} - \frac{n+1}{2n}\int d^8 z_L\, \bar{F}^{-(4n/(n+1))} - \frac{\bar{n}+1}{2\bar{n}}\int d^8 z_R\, F^{-(4\bar{n}/(\bar{n}+1))}\right\}, \tag{2}$$

где $\hat{c} = \mathrm{Ber}\,(\hat{\Delta}_A z^M)$, $\hat{\Delta}_a = \frac{i}{4}\tilde{\sigma}_a^{\dot{\alpha}\alpha}\{\hat{\Delta}_\alpha, \hat{\Delta}_{\dot{\alpha}}\}$, $\hat{\Delta}_\alpha = \partial/\partial\varphi_R^\alpha$. Если $\mathrm{Re}\,n \neq 0$, то варьирование (2) по F и $\bar{F}$ дает для них в качестве уравнений движения уравнения, которые могут быть получены решением связей третьего типа. После этого подстановка найденных так F, $\bar{F}$ в (2) дает обычное действие неминимальной $N=1$ СГ вида $-\frac{n+\bar{n}}{2\kappa^2|n|^2}\int d^8 z E(n)^{6}$ для общего случая комплексных n. Это выражение в отличие от (2) не имеет особенности при $n=-1$. При $n=-1/3$ (минимальная СГ) условие (1) не ограничивает $\bar{\rho}(z_L)$; это позволяет откалибровать H^μ (вложить $\Omega^{4,4}$ в $\mathbb{C}^{4,2}$). Переход к $n=0$ тривиализуется: в пределе (ср. с [7]), принимая во внимание, что $\int d^8 z_L = 0$, имеем

$$A(0) = \frac{1}{2\kappa^2}\{\int d^8 z\hat{c}^{-1}\,|F|^{-4} + \int d^8 z_L \ln\bar{F}^2 + \int d^8 z_R \ln F^2\}. \tag{3}$$

Для этого действия условие $\mathrm{Ber}(\partial z_R/\partial z_L) = 1$ является уравнением движения соответствующим варьированию по фазе F; с учетом его и уравнения для $|F|$ можно переписать действие (3) в стандартном виде $\frac{1}{\kappa^2}\int d^8 z E(0)\ln|F|^2$ [8].

Особая роль принадлежит чисто мнимым n. Для них, подобно случаю $n=0$, варьирование по F, $\bar{F}$ позволяет найти лишь $\left|\exp\left(\sqrt{\frac{1-n}{1+n}}\ln\bar{F}\right)\right|$ при условии, что $\sqrt{\frac{1-\bar{n}}{1+\bar{n}}}\ln\hat{r} = \sqrt{\frac{1-n}{1+n}}\ln\hat{l}$, где $\hat{r} = \mathrm{Ber}\,(\hat{\Delta}_A z_R^M)$; с учетом этого действие (2) обращается в нуль. Потому формулировка $N=1$ СГ в терминах функций вложения для мнимых n не существует: нельзя построить инвариантный суперобъем. Возникновение инварианта $\exp\left\{\sqrt{\frac{1-\bar{n}}{1+\bar{n}}}\ln\hat{r} - \sqrt{\frac{1-n}{1+n}}\ln\hat{l}\right\}$ для этих n связано с тем, что степени свободы, которые в общем случае идут на построение F, теперь остаются "без дела". Заметим, что связи третьего рода в случае мнимых n определяют F с точностью до преобразований Вейля $\bar{F} \to \exp\left(i\sqrt{\frac{1-n}{1+n}}\varphi\right)\bar{F}$, где φ вещественно (для $\zeta = 1/3$ это обстоятельство было отмечено в [4]).

При наличии материальных суперполей, а также при квантовании, предложенная формулировка может иметь очевидные преимущества по сравнению с теми [3, 5, 6], где выражение для F через $\mathcal{K}^m$ и H^μ постулируется.

Благодарю Д.В.Волкова, В.И.Огиевецкого, Э.С.Сокачева и А.С.Гальперина за полезные обсуждения.

Литература

1. *Gates S.J., Stelle K.S., West P.S.* Nucl. Phys., 1980, **B 169**, 347.
2. *Акулов В.П., Волков Д.В., Сорока В.А.* ТМФ, 1977, **31**, 12.
3. *Siegel W., Gates S.J.* Nucl. Phys., 1979, **B147**, 77.
4. *Фролов И.В.* ЯФ, 1982, **36**, 1014.
5. *Огиевецкий В.И., Сокачев Э.С.* ЯФ, 1980, **31**, 205; *Гальперин А.С., Огиевецкий В.И., Сокачев Э.С.* Письма в ЖЭТФ, 1982, **35**, 263.

6. *Gates S.J., Siegel W.* Nucl. Phys., 1980, **B263**, 519.
7. *Рослый А.А., Шварц А.С.* ЯФ, 1983, **37**, 786.
8. *Galperin A.S., Ogievetsky V.I., Sokatchev E.S.* Preprint JINR, 1982, E2-82-211, Dubna.

Харьковский
государственный университет
им. А.М.Горького

Поступила в редакцию
11 марта 1984 г.
23 июля 1984 г.