Аномальная диффузия и флуктуационные эффекты в сильно неупорядоченных средах

Л. А. Большов, А. М. Дыхне, П. С. Кондратенко

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 113191 Москва, Россия

Поступила в редакцию 31 января 2002 г.

Предложено обобщение модели транспорта примесей в сильнонеупорядоченных средах, обладающих фрактальными свойствами, с учетом супердиффузионного поведения на больших расстояниях и флуктуационного – на малых расстояниях. Установлено, что пространственные флуктуации характеристик среды приводят к перенормировке мощности источника примесей. Коэффициент перенормировки K значительно убывает с изменением размера источника R при значениях R меньше корреляционной длины, определяемой свойствами среды. В этой же области R коэффициент K, а с ним и эффективная мощность испытывают возрастающий статистический разброс.

PACS: 47.53.+n, 66.30.Jt

Миграцию частиц примеси в сильнонеупорядоченных средах, обладающих фрактальными свойствами, обычно принято анализировать на основе обобщенного уравнения переноса, приводящего к аномальной диффузии [1, 2]. Такое описание носит усредненный характер. Между тем очевидно, что локальные характеристики фрактальной среды сильно флуктуируют. Возникает вопрос: как эти флуктуации влияют на процессы переноса и каким способом соответствующие эффекты могут быть учтены. В настоящей работе предпринят анализ влияния флуктуаций на процессы переноса примесей в зависимости от размера источника.

Обобщенная схема усредненного описания транспорта примеси в статистически однородной среде в трехмерном случае может быть сформулирована в виде уравнения непрерывности

$$\partial c/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{q} = 0, \qquad (1)$$

где вектор плотности потока $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{r},\, t)$ и концентрация частиц $c(\mathbf{r},\, t)$, как функции координат и времени, связаны интегральным соотношением:

$$q_i(\mathbf{r},\, t) = -\int d\mathbf{r}' f_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbf{c}(\mathbf{r}',\, \mathbf{t}), \qquad (2)$$

а функция $f_i(\mathbf{r})$, определяемая характеристиками среды, обладает свойством

$$\int d\mathbf{r} f_i(\mathbf{r}) = 0. \qquad (3)$$

Если на далеких расстояниях функция $f_i(\mathbf{r})$ убывает быстрее, чем $|\mathbf{r}|^{-4}$, то (1) сводится к классическому уравнению диффузии, следствиями которого являются изменение длины миграции на больших временах по закону $r(t) \propto t^{1/2}$ и спад концентрации на далеких расстояниях по гауссовому закону. При убывании, более медленном, чем $|\mathbf{r}|^{-4}$, функция $f_i(\mathbf{r})$ с учетом требования сходимости интеграла (3) имеет асимптотику:

$$f_i(\mathbf{r})\big|_{|\mathbf{r}|\gg L} \cong d\left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right)\frac{V}{L^3}\left(\frac{L}{|\mathbf{r}|}\right)^{4-\alpha}, \quad 0<\alpha<1. \quad (4)$$

Здесь $d(\mathbf{n}) \sim 1$ при $|\mathbf{n}| = 1$, а V и L – характеристики среды размерности скорости и длины, соответственно. Подстановка выражения (4) в (2), а затем в (1) приводит к обобщенному уравнению диффузии, пригодному для усредненного описания переноса примесей при условии, что пространственный масштаб изменения концентрации превосходит длину корреляции L, $L|\nabla c| \ll c$. Процессы переноса при этом имеют характер супердиффузии, для которой длина миграции имеет вид $r(t) \sim L(Vt/L)^{1/(2-\alpha)}$. Альтернативная формулировка данной задачи состоит в использовании формализма дробных производных. В ней уравнение переноса отличается от классического заменой пространственных производных второго порядка на производные порядка $2-\alpha$. Подчеркнем, что в обеих формулировках речь идет об усредненном описании процессов на масштабах $|\mathbf{r}| \gg L$.

Рассмотрим теперь задачу, в которой размер источника примесей R может быть порядка или меньше в сравнении с корреляционной длиной L. Будем считать, что времена, отсчитанные от начала действия источника, удовлетворяют неравенству $t \gg L/V$. Окружим источник воображаемой поверхностью S_1 с характерным радиусом $R_1 \gg L$. Форму поверхности выберем из условия, чтобы для точечного источника, помещенного в начало координат, совпадающего с центром реального источника, концентрация примесей на ней была постоянной. Полный поток Q примесей от источника к поверхности может быть представлен в виде

$$Q = A(c_0 - c_1). \tag{5}$$

Здесь c_0 и c_1 – значения концентрации на поверхности источника S и на поверхности S_1 соответственно, а величина A определяется свойствами среды в пространстве между этими двумя поверхностями – ближней зоне. Поток Q, будучи при переходе через поверхность S_1 непрерывным, выражается через характеристики среды вне поверхности S_1 – в дальней зоне, где справедливо обобщенное уравнение переноса:

$$Q = Bc_1. \tag{6}$$

Путем исключения концентрации c_1 из (5) и (6) приходим к соотношениям

$$Q = KQ_0, \quad Q_0 = Bc_0, \quad K = A(A+B)^{-1}. \tag{7}$$

При заданной концентрации на поверхности источника величина Q_0 соответствует его мощности, полученной без учета флуктуаций свойств среды, Q отвечает эффективной мощности, которая ослаблена за счет флуктуаций, K – коэффициент перенормировки мощности.

Коэффициент B вычисляется стандартным путем на основе уравнения (1) и соотношений (2) и (4). Он по порядку величины имеет вид

$$B \sim VL^2(R_1/L)^{1+\alpha}. \tag{8}$$

На расстояниях $|\mathbf{r}| \gg L$ усредненная величина концентрации выражается через эффективную мощность Q, независимо от размера источника. В частности, уравнение (1) и соотношения (2) и (4) приводят к выражению для далекого хвоста распределения концентрации при условии, что постоянный источник действует с момента времени $t = 0$:

$$c(\mathbf{r},\, t) = Q\frac{t^2}{2}\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \propto Q\frac{t^2}{|\mathbf{r}|^{5-\alpha}}. \tag{9}$$

Коэффициент A нельзя получить на основе обобщенного уравнения переноса, поскольку для него важны детали распределения характеристик среды в ближней зоне, где они испытывают сильные флуктуации. Ситуация здесь напоминает задачу о проводимости туннельных барьеров, исследованную Райхом и Рузиным [3]. Воспользуемся поэтому развитым ими подходом. Как и проводимость в [3], коэффициент передачи A в нашей задаче определяется редкими сочетаниями благоприятных условий (например, трещинами при транспорте примесей в скальных породах) – "проколами". Вклад F в коэффициент передачи отдельного прокола статистически распределен в широком интервале значений. Этот вклад может быть представлен выражением $F = F_0 \exp(-u)$, в котором u – вспомогательная переменная, принимающая значения в интервале от 0 до ∞. Плотность проколов, отнесенная к единице площади поверхности источника S, как и в [3], можно определить соотношением

$$\rho(u) = (S_0)^{-1} \exp[-\Omega(u)]. \tag{10}$$

Здесь $S_0^{1/2}$ – характерный поперечный размер прокола, малый в сравнении со средним расстоянием между проколами, $\Omega(u)$ – функция со свойствами $\Omega(u) \gg 1$, $\partial\Omega/\partial u < 0$, $\partial^2\Omega/\partial u^2 > 0$. Усредненная по ансамблю реализаций величина коэффициента передачи имеет вид

$$\langle A\rangle = S\frac{F_0}{S_0}\int\limits_0^\infty du\, e^{-u-\Omega(u)}. \tag{11}$$

Подынтегральное выражение здесь обладает резким пиком. Поэтому из (11) с точностью до предэкспоненциального множителя получаем

$$\langle A\rangle = Sa, \quad a \approx \frac{F_0}{S_0}\exp[-u_{opt} - \Omega_{opt}]. \tag{12}$$

Здесь a – не зависящая от площади поверхности источника удельная величина коэффициента передачи, $\Omega_{opt} = \Omega(u_{opt})$, значение $u = u_{opt}$, отвечающее оптимальным проколам, определяется из соотношения $(\partial\Omega(u)/\partial u)_{u=u_{opt}} + 1 = 0$. Условие применимости результата (12) состоит в требовании, чтобы среднее количество оптимальных проколов, приходящихся на площадь поверхности источника, было велико, $S\rho(u_{opt}) \gg 1$, или

$$S > S_*, \quad S_* = S_0 \exp(\Omega_{opt}). \tag{13}$$

При малых значениях площади поверхности S, когда $S < S_*$, и среднее количество оптимальных проколов меньше единицы, усредненный коэффициент передачи определяется интегралом (11), в котором теперь в качестве нижнего предела вместо нуля будет значение $u = u_f$, отвечающее проколам, среднее количество которых на данной площади имеет порядок единицы, $S\rho(u_f) = 1$. Тогда с точностью до предэкспоненциального множителя имеем:

$$\langle A\rangle = S_* a \exp[-(u_f - u_{opt})], \quad S < S_*. \tag{14}$$

Величина u_f в силу своего определения и с учетом (10) и (13) удовлетворяет уравнению

$$\frac{S}{S_*}\exp\left[\Omega_{opt}-\Omega(u_f)\right]=1. \qquad (15)$$

Обратим внимание на то, что в то время как при больших размерах источника, когда $S > S_*$, убывание величины $\langle A\rangle$ с уменьшением площади происходит пропорционально ей самой, при малых размерах, когда $S < S_*$, оно, согласно (14), (15), идет по значительно более быстрому закону. Еще один эффект, к которому приводят флуктуации свойств неупорядоченной среды, состоит в происходящем с уменьшением размера источника возрастании статистического разброса коэффициента передачи A. Вычисления, аналогичные тем, что были проделаны для проводимости туннельных барьеров в [3], приводят к выводу, что при $S > S_*$ относительная величина разброса $\Delta(A) = \langle(A-\langle A\rangle)^2\rangle^{1/2}/\langle A\rangle$ мала, при $S < S_*$ она сравнивается с единицей, а при $S \ll S_*$ может стать больше единицы.

С учетом результатов для коэффициента передачи и на основе оценки (8), из соотношений (7) приходим к выводу, что при больших размерах источника коэффициент преобразования мощности стремится к единице ($K \cong 1$ при условии $S \gg S_*$), а в случае малых размеров его среднее значение определяется выражением

$$\langle K\rangle \cong \langle A\rangle/B \ll 1 \quad \text{при} \quad S \ll S_*. \qquad (16)$$

С уменьшением площади при $S < S_*$ возрастает и статистический разброс коэффициента преобразования $\Delta(K)$, в той же мере, что и для коэффициента передачи A. Естественно, что характерное значение площади S_*, разделяющее области двух различных режимов транспорта примеси ($S > S_*$, когда флуктуации не играют роли, и $S < S_*$, когда они существенны), имеет порядок L^2.

Таким образом, пространственные флуктуации характеристик среды приводят к существенному ослаблению усредненной по ансамблю реализаций эффективной мощности источника примесей малых размеров.

В этом случае эффективная мощность испытывает также и значительный статистический разброс.

1. J.-P. Bouchaund and A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1990)
2. К. В. Чукбар, ЖЭТФ **108**, 1875 (1995).
3. M. E. Raikh and I. M. Ruzin, in *Mesoscopic Phenomena in Solids* Eds. B. L. Altshuler, P. A. Lee, and R. A. Webb, Elsevier, 1991.