

Хаос и самоорганизация в открытой неконсервативной системе двух плоских компланарных намагниченных тел с моментами инерции

Ф. В. Лисовский¹⁾, О. П. Поляков*

Институт радиотехники и электроники РАН, 141120 Фрязино, Московская область, Россия

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119899 Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 января 2001 г.

После переработки 27 марта 2001 г.

Методами численного анализа исследованы нелинейные колебательные процессы в открытой неконсервативной системе двух плоских компланарных намагниченных тел, обладающих моментами инерции. Получены бифуркационные диаграммы, иллюстрирующие существование различных динамических режимов рассматриваемой системы в осциллирующем магнитном поле и возможность переходов от одного режима к другому при изменении параметров внешнего воздействия. Установлено, что для режимов, соответствующих инфинитным фазовым траекториям, в общем случае существует асимметрия в выборе направления вращения намагниченных тел.

PACS: 75.70.Kw

Известно, что основное состояние ферромагнетика конечных размеров, которое в подавляющем большинстве случаев является магнитнонеоднородным, в присутствии нестационарных внешних воздействий определенного типа обнаруживает способность к самоорганизации с формированием полностью или частично упорядоченных доменных структур (см., например, [1–3]). Были предприняты немногочисленные попытки математической трактовки сути происходящих при этом динамических процессов, описываемых нелинейным уравнением Ландау – Лифшица, с использованием аналитических методов [4–6], которые к серьезным успехам не привели. По-видимому, в ближайшем будущем определенного прогресса можно будет достичь методами численного анализа с привлечением средств современной вычислительной техники. Именно таким методом, например, было установлено, что система двух точечных “безмассовых” магнитных диполей, связанных дипольным взаимодействием, демонстрирует стохастическое поведение в присутствии осциллирующего магнитного поля [7]. Дальнейшие исследования, однако, показали, что полный динамический портрет такой системы, обладающей четырьмя степенями свободы, вряд ли может быть получен в настоящее время даже на самых быстродействующих компьютерах. Нами была предпринята попытка максимального огрубления использованной в [7] физической модели (при сохранении

возможности к хаотизации колебаний) путем исключения прецессионной компоненты движения магнитных диполей.

В предлагаемой модели под каждым из пары магнитных диполей понимается обладающий механическим моментом инерции центросимметричный квазидвумерный объект, вытянутый в одном из направлений и намагниченный вдоль этого же направления (объект типа магнитной стрелки компаса). Симметрия объекта характеризуется также наличием плоскости зеркального отражения, проходящей через центр симметрии перпендикулярно плоскости объекта. Предполагается, что диполи имеют ось вращения, проходящую через центр симметрии, являющийся также и центром инерции. Материал, из которого изготовлены магнитные стрелки, считается магнитножестким (с бесконечно большой коэрцитивной силой).

Численный счет производился для следующей геометрической конфигурации. Плоскостью вращения диполей являлась координатная плоскость XU ; оси вращения диполей с магнитными моментами \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 располагались на оси X и были удалены друг от друга на расстояние $\mathbf{r} = a\mathbf{e}_x$. Угловое положение магнитных стрелок в любой момент времени t однозначно определялось заданием углов $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$, где $\phi_i = \arctg(p_{iy}/p_{ix})$.

В отсутствие внешних воздействий система имеет два состояния равновесия (центры или аттракторы типа “устойчивый фокус” или “узел”), для которых

¹⁾e-mail: lisf@dataforce.net

$\phi_1 = \phi_2 = 0$ и $\phi_1 = \phi_2 = \pi$. Выбор одной из двух равновесных конфигураций определяется значениями углов $\phi_1^{(0)} = \phi_1(0)$ и $\phi_2^{(0)} = \phi_2(0)$ в начальный момент времени. В присутствии внешнего переменного магнитного поля $\mathbf{H} \sin(\omega t)$ с вектором напряженности, лежащим в плоскости XY и ориентированным под углом ϕ_H к оси X , на каждую из магнитных стрелок будут действовать обусловленные зеемановским и диполь-дипольным взаимодействиями вращательные моменты $\mathbf{K}_{1,2}$, равные

$$\mathbf{K}_{1,2} = \left[\mathbf{p}_{1,2}, \left(\mathbf{H} \sin(\omega t) + \frac{3\mathbf{r}_{2,1}(\mathbf{p}_{2,1}\mathbf{r}_{2,1}) - a^2\mathbf{p}_{2,1}}{a^5} \right) \right]. \quad (1)$$

Поскольку для рассматриваемой геометрии у вращательных моментов отлична от нуля только компонента $K_{iz} = |\mathbf{K}_i| = K_i$, изменение ориентации магнитных стрелок с моментами инерции J_1 и J_2 во времени описывается уравнениями

$$J_i \frac{d^2 \phi_i}{dt^2} + \alpha_i \frac{d\phi_i}{dt} = K_i, \quad (2)$$

где α_i – коэффициенты затухания. В явном виде эти уравнения имеют вид

$$\ddot{\phi}_1 = -\sqrt{\frac{J_2}{J_1}} [\sin \phi_1 \cos \phi_2 + \sin(\phi_1 + \phi_2)] - \beta_1 \dot{\phi}_1 + \alpha_{H1} \sin(\phi_H - \phi_1) \sin(\Omega\tau), \quad (3)$$

$$\ddot{\phi}_2 = -\sqrt{\frac{J_1}{J_2}} [\sin \phi_2 \cos \phi_1 + \sin(\phi_1 + \phi_2)] - \beta_2 \dot{\phi}_2 + \alpha_{H2} \sin(\phi_H - \phi_2) \sin(\Omega\tau),$$

где точкой над символом обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \nu t$, а безразмерные параметры β_i , α_{Hi} и Ω выражаются через исходные следующим образом:

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{\nu J_i}; \quad \alpha_{H1} = \frac{H a^3}{p_2} \sqrt{\frac{J_2}{J_1}}; \quad (4)$$

$$\alpha_{H2} = \frac{H a^3}{p_1} \sqrt{\frac{J_1}{J_2}}; \quad \Omega = \frac{\omega}{\nu}; \quad \nu = \sqrt{\frac{p_1 p_2}{a^3 \sqrt{J_1 J_2}}}.$$

Из самых общих соображений следует, что в рассматриваемой системе могут существовать по крайней мере 4 различных динамических режима. В режимах I (с предельным циклом) и II (без предельного цикла), характеризующихся финитной фазовой траекторией, диполи колеблются относительно некоторого динамического положения равновесия с размахом $\phi_{max} - \phi_{min}$, не превышающим 2π . Инфинитные

фазовые траектории соответствуют режимам III (с предельным циклом) и IV (без предельного цикла), при которых объекты могут совершать сколь угодно большое число оборотов (по часовой стрелке или против часовой стрелки) вокруг осей вращения.

Типичные результаты численного моделирования поведения исследуемой динамической системы для простейшего случая идентичных диполей ($J_1 = J_2 = J$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$; $\beta_1 = \beta_2 = \beta$) представлены в виде бифуркационных диаграмм, изображенных на рис.1 и 2 и относящихся к следующим начальным условиям и значениям внутренних параметров: $\phi_1(0) = 2.5$, $\phi_2(0) = \pi/4$, $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$, $a_H = 10$, $\beta = 0.3$, $\phi_H = 0$.

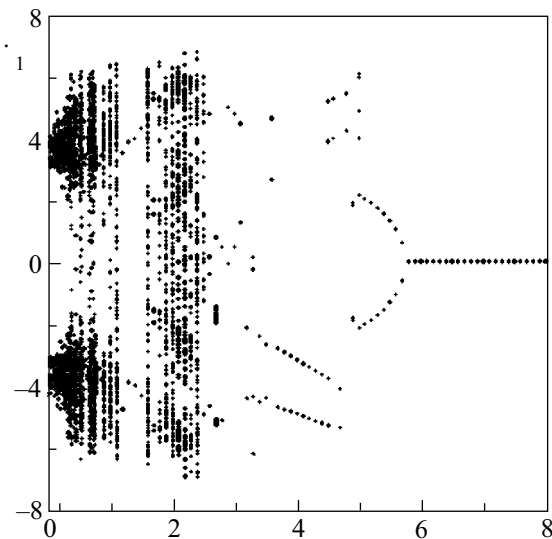


Рис.1. Зависимость максимальных и минимальных значений $\dot{\phi}_1$ от нормированной частоты магнитного поля

На рис.1 по оси ординат для каждого фиксированного значения Ω отложены максимальные и минимальные значения угловой скорости $\dot{\phi}_1$ первого магнитного диполя, реализуемые в системе при наблюдении за отрезок времени $\Delta\tau$, длительность которого значительно превышает длительность временного интервала T_e между соседними экстремумами на графике зависимости угловой скорости первого диполя от безразмерного времени $\dot{\phi}_1(\tau)$ ². Если множество значений экстремумов содержит всего один

²В нашем случае $\Delta\tau = 100T_e$; начальная точка отсчета τ_0 выбиралась таким образом, чтобы исключить влияние переходных процессов в системе на результаты наблюдений для динамических режимов с предельным циклом.

элемент, то мы имеем дело либо с устойчивым состоянием (нулевой элемент), либо с равномерным вращением, когда $\dot{\phi}_{1\max} = \dot{\phi}_{1\min} = \text{const} \neq 0$. Двухэлементное множество соответствует простому циклу с финитной (при $\phi_{1\max} = -\phi_{1\min}$) или инфинитной (при $|\phi_{1\max}| \neq |\phi_{1\min}|$) фазовыми траекториями, четырехэлементное – соответственно двойному циклу и циклу порядка n с финитной (для попарно совпадающих по модулю, но различающихся по знаку элементов) или инфинитной (для не совпадающих по модулю значений $\phi_{1\max}$ и $\phi_{1\min}$) фазовыми траекториями. При полном динамическом хаосе число элементов множества значений экстремумов линейно нарастает (пропорционально времени наблюдения), и они равномерно заполняют некоторый отрезок прямой $\Omega = \text{const}$.

Приведенные выше рассуждения показывают, что идентификация реализуемых в рассматриваемой системе динамических режимов с помощью только бифуркационной диаграммы, представленной на рис.1, может приводить к неоднозначным выводам. Для устранения этой неоднозначности необходима дополнительная информация, например, данные о том, как изменяются со временем значения функции $\phi_1(\tau)$ (или $\phi_2(\tau)$) в точках экстремумов при $\Omega = \text{const}$. Если эти значения при $\tau \gg \tau_0$ остаются неизменными (с точностью до $2\pi n$), то мы имеем дело соответственно с полностью детерминированными (существует предельный цикл) режимами I ($n = 0$) или III ($n \neq 0$). Изменение этих значений внутри ограниченного интервала $\Delta\phi < 2\pi$ свидетельствует о реализации режима II (хаотические колебания диполей около некоторого среднего положения); если величина $\Delta\phi$ неограниченно возрастает (пропорционально $\Delta\tau$), то наблюдается режим IV, то есть хаотическое вращение диполей. Данные об эволюции значений функции ϕ_1 в точках экстремумов для тех же начальных условий и тех же значений параметров, что и для бифуркационной диаграммы рис.1, приведены на рис.2.

Анализ рис.1 и рис.2 с учетом приведенных выше соображений показывает, что область высоких частот соответствует состоянию равновесия³⁾, а в точке $\Omega \approx 5.7$ возникает бифуркация Хопфа или бифуркация рождения простого цикла (режим I с малыми колебаниями диполей около положения равновесия).

³⁾ При выбранном значении коэффициента затухания $\beta = 0.3$ состояниям равновесия соответствуют аттракторы типа “устойчивый фокус”, так как $\beta < \min\{\Omega_{0i}\}$, где Ω_{0i} – собственные частоты системы для малоамплитудных колебаний (см. далее).

При уменьшении нормированной частоты амплитуда колебаний постепенно нарастает и при втором бифуркационном значении $\Omega \approx 5.0$ происходит переход к режиму III с полнооборотным вращением диполей (рождение двойных циклов, затем четверных и т.д.).

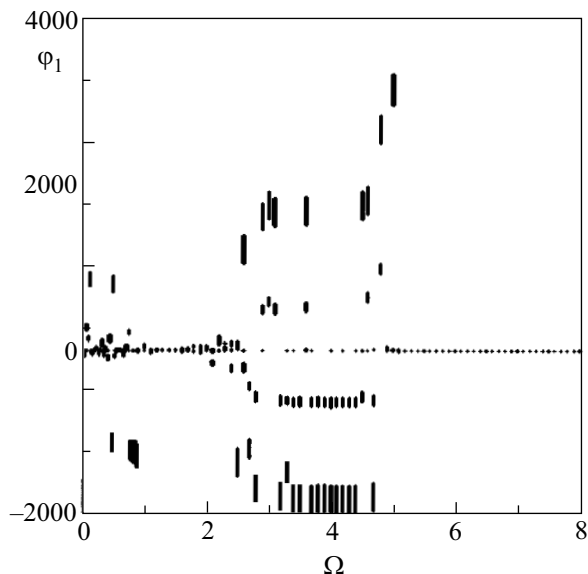


Рис.2. Зависимость максимальных и минимальных значений ϕ_1 от нормированной частоты магнитного поля

В области низких частот, меньших третьего бифуркационного значения $\Omega \approx 2.5$, в системе наблюдается хаотическое поведение. Точки внутри этой области диаграммы, представленной на рис.1, располагаются не равномерно, а имеют определенную тенденцию к сгущению и разрежению, то есть динамический хаос является не абсолютным, а структурированным. Реализуются режимы II и IV, причем области существования режима II являются предельно узкими и локализируются вблизи нескольких выделенных значений Ω , а именно, $\Omega \approx 0.875$, $\Omega \approx 0.5$, $\Omega \approx 0.125$ и т.д. (см. рис.2). Кроме того, в этой же области существуют довольно широкие зоны самоорганизации вблизи значений $\Omega \approx 1.5$ и $\Omega \approx 1.75$, где соответственно наблюдаются аттракторы типа простой цикл и двойной предельный цикл.

Бифуркационные диаграммы, изображенные на рис.1 и 2, показывают также, что для режимов III и IV, соответствующих инфинитным фазовым траекториям, в общем случае существует асимметрия в выборе направления вращения намагниченных тел. Так, например, при $\Omega \in [2.5, 5]$ вращение 1-го диполя по часовой стрелке ($\dot{\phi}_1 < 0$) реализуется значительно чаще, чем вращение против часовой стрелки ($\dot{\phi}_1 > 0$).

Видно также, что наблюдаются ситуации, когда направление вращения диполя при незначительном изменении частоты Ω изменяется на противоположное. Наличие такой асимметрии, являющейся следствием несимметричности начальных условий для 1-го и 2-го диполей (при $\phi_1^{(0)} = \phi_2^{(0)}$ асимметрия отсутствует), можно было бы отнести к разряду тривиальных явлений, если бы не одно обстоятельство, а именно: асимметрия в той или иной степени проявляется при всех значениях Ω , для которых в системе реализуется полнооборотное вращение диполей не только в детерминированном, но и в хаотическом режимах. Иными словами, динамический хаос в рассматриваемой системе обладает функцией памяти по отношению к начальным условиям.

Анализ аналогичных бифуркационных диаграмм для 2-го намагниченного тела, построенных для тех же начальных условий и значений параметров, что и для 1-го тела, показал, что качественных различий в динамическом поведении исследуемых объектов не наблюдается. В интервале изменения нормированной частоты $0 < \Omega < 8.0$ для второго намагниченного тела также существуют зоны детерминированного и хаотического поведения, аттракторы типа фокус, простые и кратные предельные циклы, преимущественно правое вращение диполя в режимах с инфинитной фазовой траекторией, области самоорганизации внутри частотного интервала с преобладанием хаоса и т.д. Заметим, однако, что изменение направления вращения 2-го объекта происходит при иных значениях Ω , чем для 1-го объекта, то есть возможны ситуации, когда намагниченные тела вращаются в противоположных направлениях.

При варьировании начальных условий существенных изменений в динамическом поведении исследуемой системы не происходит. Тем не менее, например, при уменьшении начального отклонения оси 1-го магнитного диполя от оси X (выше использовалось значение $\phi_1(0) = 2.5$) и неизменном начальном положении 2-го диполя ($\phi_2(0) = \pi/4$) возрастает число значений Ω , при которых происходит изменение направления вращения 1-го диполя, и при $\phi_1(0) \rightarrow 0$ циклы с правым и левым вращениями (для инфинитных фазовых траекторий) встречаются одинаково часто. Эти изменения, однако, практически не сказываются на динамическом портрете 2-го диполя, для которого даже при $\phi_1(0) = 0$ сохраняется асимметрия в выборе направления вращения.

Описанные выше особенности протекания динамических процессов в исследуемой системе обусловлены тем, что ее поведение описывается системой уравнений с периодическими коэффициентами, в ко-

торых внешнее воздействие выступает не в качестве вынуждающей силы, а в качестве фактора, модулирующего внутренние параметры. Действительно, если ввести новые переменные $\phi^{(+)} = \phi_1 + \phi_2$ и $\phi^{(-)} = \phi_1 - \phi_2$, то система уравнений (3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}^{(+)} + \beta \dot{\phi}^{(+)} + 3 \sin \phi^{(+)} + \\ & + \alpha_H \left(\sin \frac{\phi^{(+)} + \phi^{(-)}}{2} + \sin \frac{\phi^{(+)} - \phi^{(-)}}{2} \right) = 0, \\ & \ddot{\phi}^{(-)} + \beta \dot{\phi}^{(-)} + \sin \phi^{(-)} + \\ & + \alpha_H \left(\sin \frac{\phi^{(+)} + \phi^{(-)}}{2} - \sin \frac{\phi^{(+)} - \phi^{(-)}}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Линеаризация системы уравнений (5) при $\alpha_H = 0$ приводит к следующему результату

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}^{(+)} + \beta \dot{\phi}^{(+)} + 3\phi^{(+)} = 0, \\ & \ddot{\phi}^{(-)} + \beta \dot{\phi}^{(-)} + \phi^{(-)} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

то есть, в малоамплитудном приближении нормальными координатами системы являются величины $\phi^{(+)}$ и $\phi^{(-)}$, изменения которых представляют собой соответственно синфазные и противофазные нормальные колебания магнитных диполей с нормальными частотами $\Omega_0^{(+)} = \sqrt{3}$ и $\Omega_0^{(-)} = 1$.

Известно, что для уравнений с периодическими коэффициентами сходного вида (например, для уравнения Хилла), описывающих поведение систем с одной степенью свободы, характерным является чередование областей существования устойчивых и неустойчивых решений в пространстве частот (см., например, [8]). В отсутствие затухания неустойчивые решения могут существовать при любой отличной от нуля амплитуде A внешнего воздействия; диссипация приводит к появлению порога возникновения неустойчивостей. Зоны неустойчивости на плоскости (A, Ω) располагаются вблизи значений $\Omega = n \frac{\Omega_0}{2}$, где Ω_0 – резонансная частота для свободных (недемпфированных) колебаний. Хотя изучаемая нами система является более сложной, нельзя исключать того, что появление частотных интервалов с детерминированным динамическим поведением внутри области хаоса на рис.1 обусловлено аналогичными причинами.

В заключение заметим, что на рис.1 и 2 в качестве бифуркационного параметра выступает переменная Ω , которая является безразмерной комбинацией нескольких размерных параметров системы. Тем не менее, анализ выражений (4) показывает, что в выражение для нормировочного множителя входят лишь

геометрические (расстояние между диполями), магнитные (магнитные моменты диполей) и механические (моменты инерции) параметры, то есть оси Ω и ω связаны простым преобразованием подобия. Поэтому при экспериментальном исследовании анализируемых в настоящей работе процессов бифуркационные диаграммы следует определять путем варьирования частоты внешнего магнитного поля при неизменном расстоянии между диполями, а при сопоставлении экспериментально наблюдаемых значений мгновенных угловых скоростей диполей учитывать, что приводимые на рис.1 значения (относящиеся к производным по безразмерному времени) отличаются от реальных множителем ν^{-1} . Для областей бифуркационных диаграмм, соответствующих полнооборотным вращениям диполей, необходимо также иметь в виду существование функции динамической памяти у рассматриваемой системы, то есть зависимость опытных данных от начальных условий.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект # 99-02-17404.

1. Г. С. Кандаурова, А. Э. Свицерский, Письма в ЖЭТФ **47**, 410 (1988).
2. Ф. В. Лисовский, Е. Г. Мансветова, Письма в ЖЭТФ **55**, 34 (1992).
3. Ф. В. Лисовский, Е. Г. Мансветова, Ч. М. Пак, ЖЭТФ **108**, 2031 (1995).
4. И. Е. Дикштейн, Ф. В. Лисовский, Е. Г. Мансветова, Е. С. Чижик, ЖЭТФ **100**, 1606 (1991).
5. А. Г. Шагалов, ФММ **84**, 17 (1997).
6. В. Е. Иванов, Г. С. Кандаурова, ФММ **87**, 571 (1999).
7. Ф. В. Лисовский, О. П. Поляков, Письма в ЖЭТФ **68**, 643 (1998).
8. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, пер. с нем., М.: Наука, 1976. (E. Kamke, *Differentialgleichungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Leipzig, 1964.)