

Локальные магнитные моды и динамика двумерного магнитного солитона малого радиуса в легкоостном ферромагнетике

Б. А. Иванов, Д. Д. Шека^{*1)}

Институт магнетизма, 04071 Киев, Украина

* Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, 01033 Киев, Украина

Поступила в редакцию 23 мая 2005 г.

После переработки 10 августа 2005 г.

Рассмотрена внутренняя динамика прецессионного магнитного солитона малого радиуса. Предложена вариационная формулировка задачи о солитон-магнитном взаимодействии, с помощью которой рассчитана частота истинно локальной моды. Показано, что эта мода, как и обычная трансляционная мода, остается локализованной в пределе малых радиусов солитона. Результат о наличии локальной моды подтверждается проведенным численным расчетом задачи рассеяния.

PACS: 05.45.-a, 75.10.Hk, 75.30.Ds

Хорошо известно, что топологические солитоны играют важную роль в физике двумерного (2D) магнетизма [1]. Солитоны вносят существенный вклад в термодинамику и функции отклика магнетика. Интерес к 2D топологическим магнитным солитонам был в значительной мере инициирован работой Белавина и Полякова [2], в которой для чисто изотропного ферромагнетика (ФМ) было построено статическое решение с конечной энергией, а также показано, что тепловое возбуждение солитонов разрушает дальний порядок в таких магнетиках. Учет магнитной анизотропии, которая всегда присутствует в реальных магнетиках, разрушает масштабную инвариантность задачи и приводит к появлению характерной “магнитной длины” $l_0 = \sqrt{A/K}$, где A – константа неоднородного обмена, K – константа анизотропии. В анизотропном ФМ статические неодномерные солитоны с конечной энергией неустойчивы относительно колапса [3]. Однако в легкоосных ФМ сохранение суммарной z -проекции намагниченности

$$N = \frac{S}{a^2} \int d^2x (1 - \cos \theta)$$

приводит к существованию стабильных динамических солитонов с прецессией вектора намагниченности с частотой Ω вокруг легкой оси ФМ [4, 5]. В угловых переменных для нормированной намагниченности $\mathbf{m} = \mathbf{S}/S = (\sin \theta \cos \phi; \sin \theta \sin \phi; \cos \theta)$ структура такого прецессионного топологического солитона описывается формулами [5]

$$\theta_0 = \theta_0(r), \quad \phi_0 = \varphi_0 + q\chi - \Omega t, \quad (1)$$

где r и χ – полярные координаты в плоскости магнетика, φ_0 – произвольный угол, целое число q определяет π_2 -топологический заряд солитона (далее мы положим $q = 1$). Структура неподвижного солитона определяется решением дифференциальной задачи:

$$\frac{d^2\theta_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_0}{dr} - \sin \theta_0 \cos \theta_0 \left(\frac{1}{l_0^2} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{\Omega}{\omega_0} \sin \theta_0 = 0, \\ \theta_0(0) = \pi, \quad \theta_0(\infty) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\omega_0 = \gamma H_a$ – щель в спектре линейных магнонов, имеющих закон дисперсии $\omega(\mathbf{k}) = \omega_0(1 + l_0^2 \mathbf{k}^2)$, γ – гиromагнитное отношение, H_a – поле анизотропии, l_0 – введенная выше магнитная длина. В изотропном случае ($l_0 \rightarrow \infty$) это уравнение определяет статическое ($\Omega = 0$) решение Белавина–Полякова, $\operatorname{tg} \theta_0/2 = R/r$, где произвольный параметр R имеет смысл радиуса солитона. Решение задачи (2) может быть легко построено численно; приближенно оно описывается следующей простой функцией [6]:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} = \frac{R}{r} \exp \left(-\frac{r-R}{r_0} \right), \quad r_0 = l_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_0 - \Omega}}, \quad (3)$$

которая по существу определяет решение Белавина–Полякова с радиусом обрезания r_0 . Для анизотропного ФМ энергия солитона, его частота прецессии Ω и характерный радиус определяются числом $N \simeq \simeq S(R/a)^2$. Поскольку величина $l_0 \gg a$, a – постоянная решетки, макроскопическое приближение и квазиклассическое описание $N \gg 1$ применимы и для солитонов малых радиусов, $R \ll l_0$, которые и будут обсуждаться в нашей работе.

Свойства 2D прецессионных солитонов достаточно хорошо изучены [1], однако в настоящее время

¹⁾e-mail: denis_sheka@univ.kiev.ua

практически ничего не известно о закономерностях поступательной динамики солитонов, то есть движения солитонов как целого. Подобная проблема существует и для других 2D нелинейных состояний с нетривиальной топологией, например, магнитных вихрей. Использование комбинации прямого численного моделирования и аналитических методов показало, что динамика вихрей не является ньютонаской: координата центра вихря $\mathbf{X}(t)$ удовлетворяет уравнению с более высокими, чем вторая, производными \mathbf{X} по t [7], коэффициенты которого зависят от размеров и формы образца ФМ, в котором движется вихрь. Для локализованных солитонов (1) вопрос о возможности описания динамики на основе уравнений типа Ньютона с конечным значением эффективной массы к настоящему моменту не ясен. Так, в работах [8] утверждается, что возможна лишь безынерционная динамика локализованного солитона, “вмениженного” во внешний спиновый поток.

На первый взгляд, эта проблема может быть легко решена на основе адиабатической теории возмущений для солитонов [9]. На основе этой теории была описана динамика одномерных солитонов, находящихся под действием медленно меняющихся в пространстве и во времени возмущений произвольной формы. Однако применимость этого подхода к 2D топологическим солитонам ограничивается тем фактом, что вследствие нетривиальной топологии распределения намагниченности в солитоне его динамика как точечного объекта обладает гироскопическими свойствами, величина гироскопической постоянной $G = 4\pi q\hbar S/a^2$ [1]. В силу этого можно ожидать, что простейшее эффективное уравнение движения для координаты \mathbf{X} центра солитона, учитывающее инерционные члены, имеет вид

$$m_* \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad \mathbf{F}_g = G \left[\mathbf{e}_z \times \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right], \quad (4)$$

где m_* – эффективная масса солитона, \mathbf{F}_{ext} – внешняя сила, действующая на солитон, например, со стороны границы. Даже для свободного солитона ($\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$) это уравнение включает “быстрое” движение с частотой $\omega_L = G/m_*$ (аналог ларморовской прецессии заряженной частицы в магнитном поле), условие медленности изменения намагниченности не выполняется и адиабатическая теория возмущений [9] не применима.

В настоящей работе для анализа динамики солитона мы используем другой подход, примененный ранее для случая магнитных вихрей и базирующийся на исследовании солитон-магнитного рассеяния [10]. Идея этого подхода состоит в том, чтобы исследовать

полный набор собственных магнитных мод в присутствии солитона и выделить те из них, которые могут быть ассоциированы со смещением солитона как целого, а затем сопоставить частоты этих мод с собственными частотами уравнения (4). Таким образом мы верифицируем уравнение Ньютона и рассчитаем эффективную массу солитона m_* , которая остается конечной при любом радиусе солитона, но растет при уменьшении радиуса солитона R .

Для исследования взаимодействия магнитных солитоном используем уравнения Ландау–Лифшица:

$$\begin{aligned} l_0^2 \nabla^2 \theta - \sin \theta \cos \theta [1 + l_0^2 (\nabla \phi)^2] &= \frac{\sin \theta}{\omega_0} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \\ l_0^2 \nabla \cdot (\sin^2 \theta \nabla \phi) &= -\frac{\sin \theta}{\omega_0} \frac{\partial \theta}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для анализа солитон-магнитного взаимодействия рассмотрим малые колебания намагниченности (θ, ϕ) на фоне неподвижного солитона (θ_0, ϕ_0) , которые удобно описать комплексной “волновой функцией” $\psi = \theta - \theta_0 + i \sin \theta_0 (\phi - \phi_0)$. Линеаризованные уравнения для ψ имеют вид так называемого *обобщенного уравнения Шредингера* [6, 11]:

$$\frac{i}{\omega_0 l_0^2} \partial_t \psi = H \psi + W \psi^*, \quad H = (-i \nabla - \mathbf{A})^2 + U. \quad (6)$$

Основной спецификой этого уравнения является наличие слагаемого с W , которое связывает решения с положительной и отрицательной частотой. Интересно также появление слагаемого, имеющего структуру эффективного магнитного поля с векторным потенциалом $\mathbf{A}(\rho) = \mathbf{e}_\chi q \cos \theta_0 / r$, который пропорционален топологическому заряду q . Это слагаемое обусловлено гироскопическими свойствами среды и связано с топологическими свойствами солитона.

Потенциалы в уравнении (6) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\cos \theta_0}{l_0^2} \left[\cos \theta_0 - \frac{\Omega}{\omega_0} \right] - \frac{\sin \theta_0^2}{2} \left(\frac{1}{l_0^2} + \frac{q^2}{r^2} \right) - \frac{\theta_0'^2}{2}, \\ W &= \frac{\sin \theta_0^2}{2} \left(\frac{1}{l_0^2} + \frac{q^2}{r^2} \right) - \frac{\theta_0'^2}{2}. \end{aligned}$$

Для решения уравнения (6) используем метод разложения на парциальные волны [10, 6, 11]:

$$\psi = \sum_{\omega, m} (u_m e^{i\Phi_m} + iv_m e^{i\Phi_m}), \quad \Phi_m = m\chi - \omega_m t + \eta_m, \quad (7)$$

что позволяет свести обобщенное уравнение Шредингера (6) к спектральной задаче

$$\mathcal{H}|\mathbf{m}\rangle = \omega_m |\mathbf{m}\rangle, \quad \mathcal{H} = \begin{vmatrix} H_+ & -W \\ W & -H_- \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{m}\rangle = \begin{vmatrix} u_m \\ v_m \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Здесь $H_{\pm} = -\nabla_r^2 + U + (|\mathbf{A}| \pm m/r)^2 - 2D$ радиальные операторы Шредингера, не имеющие отрицательных собственных значений, целое число m имеет смысл азимутального квантового числа. Отметим, что спектральная задача (8) для матричного гамильтониана \mathcal{H} принципиально отличается от стандартной системы связанных уравнений Шредингера: оператор \mathcal{H} является эрмитовым лишь в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой [11]

$$\langle \mathbf{m} | \mathbf{m} \rangle = \int_0^\infty (u^2 - v^2) r dr.$$

При этом для всех собственных значений ω_m оператор H_- имеет резольвенту, поэтому $v_m = (H_- + \omega_m)^{-1} W u_m$ является подчиненной переменной в спектральной задаче.

При отсутствии солитона магнитные амплитуды $u_m = J_{|m|}(kr)$, $v_m = 0$. Взаимодействие с солитоном приводит к рассеиванию магнонов, и вдали от солитона магнитные моды имеют вид

$$u_m \propto J_m(kr) + \sigma_m(k) Y_m(kr). \quad (9)$$

Здесь $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ – функции Бесселя и Неймана n -го порядка, k – волновое число, $\sigma_m(k) = -\operatorname{tg} \delta_m(k)$ – амплитуда рассеяния, $\delta_m(k)$ – фаза рассеяния. При наличии солитона возможно также образование локализованных (связанных) состояний. Распределение (7) включает все виды возмущений неподвижного солитона, среди которых присутствуют две локальные нулевые моды, а именно, ротационная мода ($m = 0$) и нулевая трансляционная мода ($m = 1$). Их существование обусловлено наличием в решении (1) двух произвольных параметров: положения центра солитона и угла φ_0 . Для этих мод можно записать общую формулу в терминах u, v :

$$u_m^0 = r^{1-m} \left[\theta'_0 - \frac{\sin \theta_0}{r} \right], \quad v_m^0 = r^{1-m} \left[\theta'_0 + \frac{\sin \theta_0}{r} \right]. \quad (10)$$

Возмущения, связанные с φ_0 , не приводят к сдвигу солитона, а симметрия, связанная со смещением центра солитона, определяет существование нулевой трансляционной моды. Для нас важно, что полный набор мод спектральной задачи (8) включает и не-нулевые моды, связанные со смещением солитона. Координату солитона естественно записать в виде $\mathbf{X}(t) = (S/Na^2) \int (1 - \cos \theta) r d^2x$ [12]. Отсюда легко определить те возмущения, которые приводят к конечной скорости солитона $d\mathbf{X}(t)/dt$. В случае малых возмущений с использованием (5) легко записать

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{Sl_0^2 \omega_0}{Na^2} \int d^2x \cos \theta_0 \left[(\sin \theta_0 \nabla \phi_0 + i \nabla \theta_0) \psi + \text{c.c.} \right].$$

Поскольку $(\nabla \theta_0, \nabla \phi_0) \propto (\sin \chi, \cos \chi)$, а остальные слагаемые под интегралом зависят только от r , интересующим нас свойством обладают только моды с $m = \pm 1$. Итак, динамика $\mathbf{X}(t)$ может быть связана только с модами с $|m| = 1$, причем для возможности движения солитона как частицоподобного объекта, которое не сопровождается возбуждением магнитных мод во всем объеме системы, соответствующая мода должна быть локализованной.

Магнитные моды, локализованные на солитоне, исследовались в работах [13, 6]. В работе [6] с использованием двухпараметрического метода стрельбы мы показали, что солитон достаточно большого радиуса обладает набором локальных мод с $|m| \leq m_{\max}(R)$. При уменьшении радиуса солитона моды последовательно покидают область щели (дискретного спектра), переходят в непрерывный спектр и превращаются в квазилокальные. Так, при $R \lesssim 2.8l_0$ теряют локализацию все моды с $|m| > 2$, а при $R \lesssim 1.5l_0$ в системе существует лишь одна локальная ненулевая мода с $m = -1$, которую можно назвать *ненулевой трансляционной модой*. При уменьшении R частота этой моды $\omega_{m=-1}$ асимптотически приближается к границе непрерывного спектра, а экспоненциальное убывание возмущения намагниченности вдали от солитона становится более медленным, $r_0 \gg l_0$. Волновая функция делокализуется, при этом численный анализ, основанный на двухпараметрическом методе стрельбы, становится затруднительным и ненадежным (фактически, в работе [6] удалось рассмотреть только солитоны с $R \gtrsim 0.3l_0$). Поэтому вопрос о том, что будет происходить при дальнейшем уменьшении радиуса солитона, остается открытым: будет ли солитон обладать ненулевой трансляционной модой в случае солитонов малого радиуса для так называемых *магнитных скирмionов* либо эта мода “уйдет” в магнитный континуум, трансформировавшись в квазилокальную моду. Как мы обсуждали выше, этот вопрос является принципиальным в связи с проблемой адекватности ньютоновских уравнений для описания динамики солитонов.

Вопрос о существовании локальной моды может быть решен независимым методом при помощи анализа с данных рассеяния. Как было отмечено выше, задачу о локальной моде, основанной на двухпараметрическом методе стрельбы, не удается решить численно для солитонов предельно малого радиуса, однако задача рассеяния магнонов на солитоне может быть проинтегрирована численно для сколь угодно малых солитонов с использованием однопараметрического метода стрельбы [6]. Данные рассеяния позволяют сделать вывод о наличии либо отсутствии ло-

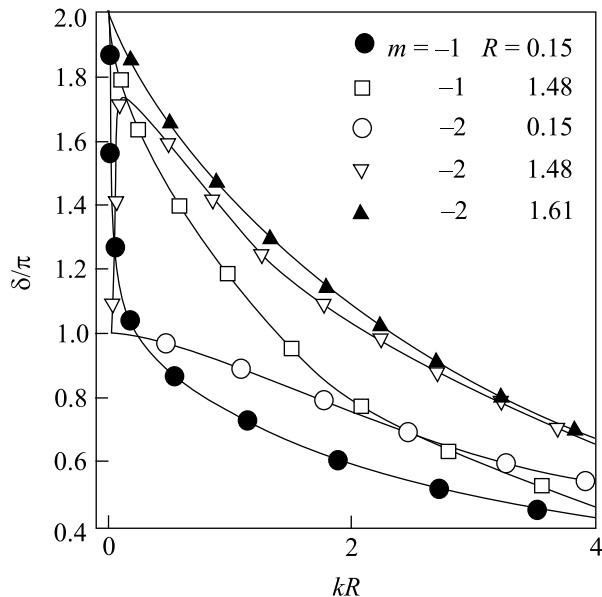
кальной моды, основываясь на использовании квантовомеханической теоремы Левинсона, согласно которой число связанных состояний и суммарный фазовый сдвиг в данных рассеяния для парциальной моды связаны между собой. При анализе солитон-магнитного рассеяния задача усложняется тем, что эффективные потенциалы имеют особенности в нуле (вида ν^2/r^2) и на бесконечности (μ^2/r^2), где числа ν и μ не равны m . Недавно мы обобщили теорему Левинсона для таких сингулярных потенциалов [14] и показали, что суммарный сдвиг в фазе рассеяния (9) определяется выражением

$$\delta_m(0) - \delta_m(\infty) = \pi \left[N_m^b + \frac{|\nu| - |\mu|}{2} \right].$$

В нашем случае $\nu = q - m$ и $\mu = q + m$, и суммарный фазовый сдвиг может быть представлен в виде

$$\delta_m(0) - \delta_m(\infty) = \pi [N_m^b - \operatorname{sgn} m]. \quad (11)$$

При изменении числа локальных мод на единицу суммарный фазовый сдвиг испытывает скачок, равный π , что может быть использовано для нахождения момента, когда исчезает локальная мода. Данные рассеяния для моды с $m = -1$ приведены на рисунке. Для демонстрации работы метода мы также



Фазовый сдвиг для мод с $m = -1$ и $m = -2$ при различных радиусах солитона

привели на этом рисунке данные рассеяния для моды с $m = -2$. В частности, как было показано нами ранее в работе [6], солитон достаточно большого радиуса имеет локальную моду с $m = -2$. При этом

общий фазовый сдвиг в соответствии с (11) равен 2π . Такая картина соответствует кривой с \blacktriangle на рисунке. При уменьшении радиуса солитона локальная мода покидает область дискретного спектра, поэтому число связанных состояний уменьшается на единицу и суммарный фазовый сдвиг становится равным π , см. кривые с символами ∇ и \square на рисунке. Численный расчет, проведенный для моды $m = -1$, показывает, что при любых радиусах солитона суммарный фазовый сдвиг равен 2π , см. рисунок (кривые с \bullet и \square). Сравнение этого результата с соотношением (11) подтверждает приведенный выше вывод о том, что ненулевая локальная мода с $m = -1$ всегда присутствует для солитонов любого радиуса.

Для расчета частоты ненулевой трансляционной моды удобно переформулировать спектральную задачу в виде вариационной проблемы для функционала (лагранжиана)

$$\mathcal{L} = \omega_0 l_0^2 (\mathbf{m} | \mathcal{H} | \mathbf{m}) - \omega_m (\mathbf{m} | \mathbf{m}). \quad (12)$$

Для солитона малого радиуса все высшие моды с $|m| > 1$ перестают быть локальными. Среди оставшихся трех мод с $m = -1, 0, 1$ две являются нулевыми. Одним из главных моментов при использовании вариационного подхода является адекватный выбор пробной функции. Для этого воспользуемся близостью структуры солитонного решения (3) к решению Белавина–Полякова в широкой области значений координаты, $r \ll r_0$, $r \geq R$. Для солитона Белавина–Полякова все три моды с $m = -1, 0, 1$ имеют нулевую частоту и определяются формулами (10) [15]. Для солитонов малого радиуса естественно использовать в качестве пробных функций для моды $m = -1$ комбинации приведенных выше (10) функций $u_{\pm 1}^0$ и $v_{\pm 1}^0$:

$$\begin{aligned} u_{-1}^\omega &= u_1^{\omega=0} + ar^2\theta'_0 - br\sin\theta_0, \\ v_{-1}^\omega &= u_1^{\omega=0} + ar^2\theta'_0 + br\sin\theta_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Эффективный лагранжиан (12), расщепленный на этих пробных функциях, принимает вид

$$\begin{aligned} L = (a+b)^2 &\left\{ \langle \sin^2 \theta_0 \rangle - \frac{\omega}{2\omega_0} \langle 1 - \cos \theta_0 \rangle^2 \right\} + \\ &+ \frac{4ab\omega}{\omega_0 l_0^2} \langle r^2 (1 - \cos \theta_0) \rangle + 2a^2 \langle r^2 \theta_0'^2 - \sin^2 \theta_0 \rangle, \end{aligned}$$

где $\langle f(r) \rangle = \int_0^\infty f(r) r dr$. Условия $\partial L / \partial a = 0$ и $\partial L / \partial b = 0$ приводят к выражению для собственной частоты ненулевой трансляционной моды:

$$\omega_{m=-1} = \frac{2\omega_0 l_0^2 F}{4 \langle r^2 (1 - \cos \theta_0) \rangle + l_0^2 F \langle 1 - \cos \theta_0 \rangle^2}, \quad (14)$$

где $F = \langle \sin^2 \theta_0 \rangle \langle r^2 \theta_0'^2 - \sin^2 \theta_0 \rangle$.

Для интересующего нас солитона малого радиуса структура кора близка к структуре солитона Белавина–Полякова и при $r \ll r_0$ выполняется соотношение $r^2 \theta_0'^2 = \sin^2 \theta_0$. Поэтому величина F определяется областью на больших расстояниях от центра $r \geq r_0$:

$$F \approx \frac{\omega_0 - \Omega}{\omega_0 l_0^2} \langle \sin^2 \theta_0 \rangle \langle r^2 \sin^2 \theta_0 \rangle,$$

и всегда мала. Далее, используя для оценки средних приближенное решение (3), получим выражение для собственной частоты (14)

$$\omega_{m=-1} \approx (\omega_0 - \Omega) \left[1 - \frac{2R^2(\omega_0 - \Omega)}{\omega_0 l_0^2} \ln \frac{\omega_0}{\omega_0 - \Omega} \right]. \quad (15)$$

Таким образом, мы видим, что при уменьшении радиуса солитона мода с $m = -1$ остается локальной, но ее частота при $R \rightarrow 0$ асимптотически приближается к границе континуума.

Таким образом, на основе анализа задачи рассеяния для обобщенного уравнения Шредингера, описывающего магноны на фоне солитона, мы доказали существование локальной трансляционной магнитной моды с ненулевой частотой и азимутальным числом $m = -1$. Аналитически найдена частота этой моды, которая асимптотически стремится к границе спектра ω_0 при уменьшении радиуса солитона $R \ll l_0$. В терминах координаты солитона эта мода соответствует ларморовской прецессии центра солитона с малой амплитудой. Учет этой моды, а также моды с $m = +1$, которая приобретает ненулевую частоту при учете фиксированных граничных условий для магнетика круговой формы с радиусом L (что приводит к появлению возвращающей силы вида $F_{\text{ext}} = -\varkappa r$, $\varkappa \propto \exp(-L/r_0)$), однозначно соответствует Ньютоновской динамике солитона в рамках уравнения (4). В этом случае возникает медленное движение солитона с частотой моды $\omega_{m=1}$, что при малых \varkappa может быть представлено как \varkappa/G и не содержит инерционной массы, а также ларморовской прецессии с частотой ненулевой моды $\omega_{m=-1} = G/m_\star$. Проведенный нами расчет частоты $\omega_{m=-1}$ позволяет найти эффективную массу солитона

$$m_\star = \frac{G}{\omega_{m=-1}} \approx \frac{4\pi\hbar S}{a^2(\omega_0 - \omega)}. \quad (16)$$

При уменьшении радиуса солитона $\omega \rightarrow \omega_0$ его масса неограниченно возрастает. Таким образом, солитон теряет свою подвижность при уменьшении его радиуса.

Работа одного из авторов (Д.Д.Ш.) была частично поддержана украинско-немецким проектом # UKR-02-011 и украинско-французским проектом “Дніпро” (грант # 09855WF).

1. А. К. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев, 1983; A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, Phys. Rep. **194**, 117 (1990); V. G. Bar'yakhtar and B. A. Ivanov, Sov. Sci. Rev. Sec. A **16**, 3 (1993).
2. А. А. Белавин, А. М. Поляков, Письма в ЖЭТФ **22**, 503 (1975).
3. R. H. Hobard, Proc. Phys. Soc. **82**, 201 (1963); G. H. Derrick, J. Math. Phys. **5**, 1252 (1964).
4. Б. А. Иванов, А. К. Косевич, Письма в ЖЭТФ **24**, 495 (1976).
5. А. С. Ковалев, А. К. Косевич, К. В. Маслов, Письма в ЖЭТФ **30**, 321 (1979).
6. D. D. Sheka, B. A. Ivanov, and F. G. Mertens, Phys. Rev. B **64**, 024432 (2001).
7. F. G. Mertens and A. R. Bishop, in *Nonlinear Science at the Dawn of the 21th Century*, Eds. P. L. Christiansen, M. P. Soerensen, and A. C. Scott, Springer–Verlag, Berlin, 2000.
8. N. Papanicolaou and T. N. Tomaras, Nucl. Phys. B **360**, 425 (1991); N. Papanicolaou and W. J. Zakrzewski, Physica D **80**, 225 (1995); B. Piette and W. J. Zakrzewski, Physica D **314** (1998).
9. K. Lonngren and A. Scott, *Solitons in action*, Academic Press, 1978.
10. B. A. Ivanov, H. J. Schnitzer, F. G. Mertens, and G. M. Wysin, Phys. Rev. B **58**, 8464 (1998).
11. D. D. Sheka, I. A. Yastremsky, B. A. Ivanov et al., Phys. Rev. B **69**, 054429 (2004).
12. D. D. Sheka, C. Schuster, B. A. Ivanov, and F. G. Mertens, cond-mat/0505542 (2005).
13. F. K. Abdullaev, R. M. Galimzyanov, and A. S. Kirakosyan, Phys. Rev. B **60**, 6552 (1999).
14. D. Sheka, B. Ivanov, and F. G. Mertens, Phys. Rev. A **68**, 012707 (2003).
15. Б. А. Иванов, Письма в ЖЭТФ **61**, 898 (1995).