Письма в ЖЭТФ, том 82, вып. 9, с. 647 – 651

Формальная устойчивость трехмерных течений идеальной проводящей жидкости

В. И. Ильгисонис, И. В. Хальзов

Российский научный центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 сентября 2005 г.

Указано, что линеаризованная динамика идеальной жидкости обладает бесконечным набором инвариантов, отличных от обычных казимиров; предъявлена процедура их построения. Учет одного или нескольких таких инвариантов позволяет получить достаточное условие устойчивости течений жидкости в рамках обычной или магнитной гидродинамик, которое оказывается более "мягким" (то есть ближе к необходимому) по сравнению с ранее известными.

PACS: 46.15.Cc, 52.30.Cv

Отклонение консервативной физической системы от положения равновесия может эффективно нарастать во времени, что свидетельствует о неустойчивости такого равновесия. При достаточно малой амплитуде отклонения динамика системы приближенно описывается линеаризованными уравнениями, что предопределяет привлекательность спектральных методов для исследования устойчивости. Методическая трудность корректного исследования спектральной устойчивости в континуальных средах заключается в необходимости отыскания наряду с собственными значениями также и собственных векторов, которые должны удовлетворять определенным граничным условиям. В результате вместо обычного для конечномерных систем дискретного спектра в гидродинамике мы зачастую имеем непрерывный или даже отсутствие спектра вообще. Вместе с тем, как известно, для получения ответа "да-нет" на вопрос об устойчивости состояния равновесия можно использовать вариационные методы, в частности, теорию Ляпунова. Аналог теоремы Ляпунова для линеаризованной системы иногда называют условием формальной устойчивости. А именно, состояние равновесия объявляется формально устойчивым, если существует инвариант линеаризованной динамики системы, U, первая вариация которого равна нулю в точке равновесия, а вторая знакоопределена. Формальная устойчивость гарантирует спектральную; что же касается нелинейной устойчивости, то здесь – в отличие от классического результата Лагранжа для конечномерных систем – общего утверждения не существует, нужен дополнительный анализ. К тому же в гидродинамике можно говорить не о знакоопределенности (скажем, $\delta^2 U > 0$), а лишь о полузнакоопределенности ($\delta^2 U \geq 0$), что, по-прежнему, гарантирует отсутствие экспоненциально нарастающих возмущений, но не позволяет судить о возможности развития более медленных возмущений. Тем не менее даже такая задача не решена в настоящее время с достаточной полнотой; предлагаемый в данной работе подход может, как мы надеемся, способствовать прогрессу в ее решении.

Вместе с тем известны и континуальные примеры, когда условие формальной устойчивости является исчерпывающим. К их числу, в частности, относится статическое равновесие идеальной проводящей жидкости (плазмы) в магнитном поле [1]. Вдохновляясь этим обстоятельством, будем рассматривать линеаризованное уравнение магнитной гидродинамики (МГД), которое в терминах смещения жидкого элемента $\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{r})$ имеет вид (см., например, [2]):

$$\rho\ddot{\boldsymbol{\xi}} + 2\rho(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\dot{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = 0. \quad (1)$$

Здесь точка обозначает частную производную по времени, а $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})$ – линеаризованный силовой оператор,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = &-\delta\rho(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V} - \rho(\delta\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V} -\\ &-\rho(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\delta\mathbf{V} - \boldsymbol{\nabla}\delta p + ((\boldsymbol{\nabla}\times\delta\mathbf{B})\times\mathbf{B} +\\ &+(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\times\delta\mathbf{B})\frac{1}{4\pi} - \delta\rho\boldsymbol{\nabla}\Phi, \quad (2)\end{aligned}$$

составленный из возмущенных физических величин

$$\delta\rho = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{\xi}), \quad \delta\mathbf{V} = (\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V},$$

$$\delta p = -\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla}p - \gamma p\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi}, \quad \delta\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}).$$

Отметим, что мы используем обозначение $\delta\mathbf{V}$ для части полного возмущения скорости (за вычетом $\dot{\boldsymbol{\xi}}$), связанной лишь с пространственной неоднородностью исходного течения и его возмущения. Стационарные плотность жидкости ρ, скорость $\mathbf{V}$, давление p, магнитное поле $\mathbf{B}$ и потенциал внешнего силового поля $\Phi(\mathbf{r})$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &\rho(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V}+\boldsymbol{\nabla}p=(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}\frac{1}{4\pi}-\rho\boldsymbol{\nabla}\Phi,\\ &\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{V})=0,\\ &\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}p+\gamma p\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}=0,\\ &\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{B})=0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь γ – показатель адиабаты. Уравнения (1)–(3) описывают довольно общую гидродинамическую систему. Переход от МГД к обычной гидродинамике осуществляется в (2) посредством $\mathbf{B}\to 0$; при этом (3) переходят в уравнения обычной гидростатики. Предел несжимаемой жидкости требует дополнительно $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}=0$; $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi}=0$.

Можно убедиться, что силовой оператор в (1) является самосопряженным,

$$\int\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})\,d^3r=\int\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta})\,d^3r, \tag{4}$$

тогда как член с $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ в (1) – с очевидностью антисимметричным:

$$\int\boldsymbol{\eta}\cdot\rho(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\xi}\,d^3r=-\int\boldsymbol{\xi}\cdot\rho(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\eta}\,d^3r. \tag{5}$$

Интегрирование в (4)–(5) выполняется по всему пространству, возмущения на бесконечности отсутствуют.

Консервативность динамики (1) может быть проверена посредством умножения (1) на $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ и интегрирования по всему пространству, откуда получаем $\dot{E}=0$ для

$$E(t)=\int\left(\rho\frac{\dot{\boldsymbol{\xi}}^2}{2}-\frac{\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})}{2}\right)d^3r. \tag{6}$$

Рассматривая $E(t)$ как функционал Ляпунова вблизи стационарного состояния (равновесия) $\boldsymbol{\xi}=0$, $\dot{\boldsymbol{\xi}}=0$ и минимизируя по $\dot{\boldsymbol{\xi}}$, дающей вклад лишь в неотрицательную кинетическую энергию, приходим к условию формальной устойчивости в виде

$$E\geq W=-\frac{1}{2}\int\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})\,d^3r\geq 0. \tag{7}$$

Для статического МГД равновесия (с $\mathbf{V}=0$) условие (7), полученное в [1], является не только достаточным, что обеспечивается теоремой Ляпунова, но и необходимым для устойчивости. Другими словами, если существует $\boldsymbol{\xi}_-:W[\boldsymbol{\xi}_-]<0$, то в окрестности положения равновесия $\dot{\boldsymbol{\xi}}=0$, $\boldsymbol{\xi}=0$ можно построить решение уравнения (1), которое нарастает со временем не медленнее, чем экспоненциально [1]. Для случая $\mathbf{V}\neq 0$ условие (7), полученное в [2], разумеется, также является достаточным для устойчивости по построению. Однако практически удовлетворить этому условию можно лишь в случае течения жидкости строго вдоль магнитного поля, $\mathbf{V}\parallel\mathbf{B}$ [2], или в случаях, сводящихся к этому посредством специального преобразования [3]. Действительно, записывая W в виде

$$\begin{aligned} W=\int d^3r\Big\{&\frac{1}{4\pi}[\boldsymbol{\nabla}\times[\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}]]^2-\frac{1}{\rho}\,[\boldsymbol{\nabla}\times[\boldsymbol{\xi}\times\rho\mathbf{V}]]^2+\\ &+\frac{1}{4\pi}[\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\nabla}\times[\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}]]\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}-\\ &-[\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\nabla}\times[\boldsymbol{\xi}\times\rho\mathbf{V}]]\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}+\mathbf{V}^2(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{\xi}))^2+\\ &+\left(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{\mathbf{V}^2}{2}-2\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{\xi})+\\ &+\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla}p\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi}+\gamma p\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi})^2\Big\}, \end{aligned} \tag{8}$$

нетрудно заметить, что первые два члена в (8) имеют одинаковую структуру, но противоположный знак. Если равновесное течение жидкости происходит под углом к направлению магнитного поля, то, выбирая пробное возмущение практически однородным вдоль линий $\mathbf{B}$, но заметно меняющимся вдоль линий тока, можно легко сделать сумму этих членов отрицательной; это, довольно очевидное, обстоятельство детально рассмотрено в [4]. Поскольку эти члены содержат наивысший порядок производных $\boldsymbol{\xi}$, то, следовательно, $W(\boldsymbol{\xi})$ не удовлетворяет даже необходимому для положительной определенности условию Лежандра. Разумеется, все сказанное относится и к течениям обычной жидкости (без магнитного поля), где стабилизирующее возмущение магнитной энергии просто отсутствует.

Улучшенное по сравнению с (7) условие устойчивости можно получить, если учесть, что $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ и $\boldsymbol{\xi}$ в (6) не являются полностью независимыми. К примеру, если исходная динамика (1) демонстрирует и другие инварианты, не сводящиеся к энергии, величину E можно минимизировать лишь на классе возмущений $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ и $\boldsymbol{\xi}$, не меняющих значения этих инвариантов. Идеи такого рода высказывались еще Ляпуновым; применительно к гидродинамике они были формализованы Арнольдом [5, 6], показавшим, что сохранение интеграла завихренности в идеальной жидкости приводит к расслоению фазового пространства системы на симплектические листы, причем аналогичным свойством обладают и другие инварианты. Последнее обстоятельство весьма существенно, поскольку завихренность, во-первых, не является универсальным инвариантом в гидродинамике и, во-вторых, ее сохранения, как сразу отмечалось в [6], недостаточно для получения удовлетворительного условия устойчивости трехмерных течений.

Среди других возможных инвариантов гидродинамических уравнений наиболее естественно рассмотреть, прежде всего, сохранение импульса/момента импульса или их компонент, имеющее место при определенной симметрии системы, геометрической или топологической. Именно благодаря такой симметрии и возможны стационарные течения. Для линеаризованного уравнения (1) соответствующий инвариант может быть выражен в терминах так называемых нейтральных смещений $\boldsymbol{\xi}_N$:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_N) = 0, \quad \partial_t \boldsymbol{\xi}_N = 0. \tag{9}$$

Действительно, умножая (1) скалярно на $\boldsymbol{\xi}_N$ и интегрируя по всему пространству, используя определение (9), получаем $\dot{I} = 0$, где

$$I = \int (\rho \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \boldsymbol{\xi}_N + 2\rho \boldsymbol{\xi}_N (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{\xi})\, d^3 r.$$

В конкретной геометрии общий вид нейтрального смещения может быть найден даже аналитически. Так, для типичной в лабораторной физике плазмы топологии тороидально вложенных магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$: $\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0$, нейтральное смещение имеет функциональный вид

$$\boldsymbol{\xi}_N = \lambda_u(\psi)\mathbf{u} + \lambda_v(\psi)\mathbf{V}, \tag{10}$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{B}/\rho, \mathbf{V} = \mathbf{D}/\rho$, а $\mathbf{D}$ – бездивергентный вмороженный в плазму вектор, касательный (подобно $\mathbf{B}$) тем же магнитным поверхностям, но отличный от $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{D} = \rho \boldsymbol{\nabla} \psi.$$

Этот инвариант имеет свой нелинейный аналог, известным частным случаем которого (при $\lambda_v = 0$ в (10)) является сохранение перекрестной спиральности.

Учет этого инварианта действительно позволяет улучшить энергетический принцип (7) – соответствующее достаточное условие устойчивости для системы вложенных магнитных поверхностей было получено Ильгисонисом, Пастуховым [7] и Хамеири [4]. Однако и в этом (улучшенном) условии вышеупомянутая проблема знакоопределенности функционала энергии для произвольного стационарного течения не решена, поэтому необходимо привлечение в анализ дополнительных инвариантов.

Недавно нами была анонсирована [8, 9] идея использовать при анализе устойчивости новый набор инвариантов, присущих линеаризованной системе (1). Дифференцируя (1) по времени n раз, выразим $(n+2)$-ю производную $\boldsymbol{\xi}$ по времени через низшие:

$$\boldsymbol{\xi}^{n+2} = -2(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\xi}^{n+1} + \frac{1}{\rho}\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}^{(n)}). \tag{11}$$

Домножая (11) на $\boldsymbol{\xi}^{n+1}$ и интегрируя по всему пространству с учетом (5), получаем, как и в случае энергии, что величина

$$E_{n+1} = \frac{1}{2}\int \left\{ \rho(\boldsymbol{\xi}^{n+1})^2 - \boldsymbol{\xi}^{(n)} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}^{(n)}) \right\} d^3 r \tag{12}$$

является точным инвариантом (1) (величина E_1 отождествляется с энергией E). Разумеется, используя цепочку (11), все высшие производные по времени в (12) выражаются через $\dot{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi}$. В частности,

$$E_2 = \frac{1}{2}\int \left\{ \frac{1}{\rho}\left(\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) - 2\rho\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\dot{\boldsymbol{\xi}}\right)^2 - \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F}(\dot{\boldsymbol{\xi}}) \right\} d^3 r. \tag{13}$$

Для континуальной среды интегралы вида (12) в общем случае независимы. Для наших целей существенно, что, как видно уже из выражения (13) для E_2, первый положительно определенный член также содержит теперь (в отличие от E) старшие пространственные производные возмущения и, следовательно, может конкурировать с подобным членом во втором знаконеопределенном слагаемом.

Наличие дополнительных инвариантов (12) позволяет минимизировать энергию (6), по-прежнему рассматриваемую в качестве функционала Ляпунова, но лишь на классе возмущений $\dot{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi}$, обеспечивающих равенство одного или нескольких инвариантов $E_{n>1}$ своему равновесному значению, то есть нулю. Для этого можно составить новый функционал вида

$$U = E + \sum_{i=1} \lambda_{i+1} E_{i+1} - I, \tag{14}$$

где λ_i – множитель Лагранжа; безусловные экстремали U покрывают, как известно, искомый класс условных экстремалей E. Ограничимся для иллюстрации случаем, когда все $\lambda_{i>2} = 0$, то есть учтем лишь один дополнительный инвариант (13) семейства (12). Тогда

$$\begin{aligned} U = \int \Bigg\{ & \frac{\rho \dot{\boldsymbol{\xi}}^2}{2} - \frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})}{2} + \\ & + \frac{\lambda_2}{2\rho}\left(\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) - 2\rho(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\dot{\boldsymbol{\xi}}\right)^2 - \frac{\lambda_2}{2}\dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F}(\dot{\boldsymbol{\xi}}) + \\ & + (2\rho\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}) - \rho\dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot)(\lambda_u \mathbf{u} + \lambda_v \mathbf{V}) \Bigg\} d^3 r. \end{aligned} \tag{15}$$

Сразу отметим, что величины E и E_2 эквивалентны, и можно было бы приписать множитель Лагранжа в (15) величине E вместо E_2. Легко убедиться, что рассмотрение одного лишь E_2 в качестве функционала Ляпунова также позволяет получить условие положительной определенности потенциальной энергии (7), хотя, как будет видно из нижеследующего примера, оно может привести и к более адекватному условию устойчивости. Поскольку кинетическая энергия в E неотрицательна, будем искать минимум величины (15) по $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ (разумеется, при этом формально необходимо $\delta^2 U/\delta\dot{\boldsymbol{\xi}}^2 > 0$, что следует проверить после выбора набора λ). Уравнение Эйлера для минимизирующего возмущения $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ дает

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \underbrace{\lambda_u \mathbf{u} + \lambda_v \mathbf{V}}_{\boldsymbol{\xi}_N} + \lambda_2 \frac{\mathbf{F}(\dot{\boldsymbol{\xi}})}{\rho} + \\ + 2\lambda_2 \mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(2(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})}{\rho}\right). \qquad (16)$$

Проследим формальную преемственность с уже известными условиями. Полагая формально $\lambda_{u,v,2} = 0$ в (15) и минимизируя по $\dot{\boldsymbol{\xi}}$, приходим к условию (7) Фримана–Ротенберга. Сохраняя в (16) $\lambda_{u,v}$ при $\lambda_2 \to 0$, получаем условие Ильгисониса–Пастухова–Хамеири [7, 4]:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} \to \boldsymbol{\xi}_N, \quad U \to U_{IPH} = \int d^3r \left(\frac{\rho\boldsymbol{\xi}_N^2}{2} - \frac{\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})}{2}\right),$$

где $\boldsymbol{\xi}_N$ обеспечивает

$$\int (\rho\boldsymbol{\xi}_N^2 - 2\rho\boldsymbol{\xi}\cdot(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\xi}_N)\, d^3r = 0.$$

Как уже отмечалось выше, хотя условие $U_{IPH} \ge 0$ и мягче условия Фримана–Ротенберга (7) ($U_{IPH} \ge U_{FR} = -\int \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) d^3r/2$), тем не менее, оно все еще неудовлетворительно для произвольного течения с $\mathbf{V}$, не параллельным $\mathbf{B}$. Однако в этом пределе мы не учитывали инвариантность $E_{n\ge 2}$. Попытаемся улучшить это условие, предполагая λ_2 малым, но конечным. В первом порядке по λ_2 уравнение (16) позволяет определить минимизирующее $\boldsymbol{\xi}$ явно:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} \approx \boldsymbol{\xi}_N - 2\lambda_2(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\ddot{\boldsymbol{\xi}}_0, \qquad (17)$$

где мы символически обозначили

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}}_0 = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})/\rho - 2(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\xi}_N.$$

Искомое условие устойчивости записывается в этом случае для произвольного $\boldsymbol{\xi}$:

$$U \ge U_{\min} = \\ = \int\left\{\frac{\rho}{2}(\boldsymbol{\xi}_N - 2\lambda_2(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\ddot{\boldsymbol{\xi}}_0)^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})\right\} d^3r \ge 0. \qquad (18)$$

Рассматривая для конкретности систему со вложенными магнитными поверхностями, для которой величина $\boldsymbol{\xi}_N$ задается выражением (10), определим множители Лагранжа в (18), подставив (17) в условия

$$E_2, I\ (\dot{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi}) \approx 0.$$

Имеем:

$$\lambda_2 = \frac{1}{8}\frac{\int \rho\ddot{\boldsymbol{\xi}}_0^2\ d^3r}{\int \rho((\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\ddot{\boldsymbol{\xi}}_0)^2\, d^3r},$$

$$\lambda_u = \frac{A_v D_u - A_0 D_v}{A_u A_v - A_0^2}, \quad \lambda_v = \frac{A_u D_v - A_0 D_u}{A_u A_v - A_0^2}.$$

Здесь

$$A_{w=u,v} = \langle 4\lambda_2\rho((\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{w})^2 - \rho\mathbf{w}^2\rangle,$$

$$A_0 = \langle 4\lambda_2\rho((\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u})\cdot((\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V}) - \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{V}\rangle,$$

$$D_{w=u,v} = \langle 2(\lambda_2\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) - \rho\boldsymbol{\xi})\cdot(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{w}\rangle,$$

а угловые скобки означают усреднение по магнитной поверхности.

Разумеется, инварианты E_n могут использоваться для анализа устойчивости и в другой комбинации. Рассмотрим в качестве иллюстрации осесимметричное равновесие холодной ($p = 0$) плазмы постоянной плотности, вращающейся вокруг притягивающего центра в отсутствие магнитного поля. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) $\mathbf{V} = r\Omega\mathbf{e}_\varphi$, где Ω – угловая скорость равновесного вращения, связанная с градиентом потенциала, $\Omega^2 = \partial\Phi/r\partial r$. Симметрия задачи позволяет искать решение в виде разложения в ряд Фурье в направлении симметрии:

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_m \boldsymbol{\xi}_m,$$

$$\boldsymbol{\xi}_m = [\xi_r(t,r,z)\mathbf{e}_r + \xi_\varphi(t,r,z)\mathbf{e}_\varphi + \xi_z(t,r,z)\mathbf{e}_z]e^{im\varphi}.$$

Уравнение (1) записывается в простом виде

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} + 2\Omega\widehat{A}\,\dot{\boldsymbol{\xi}} - \widehat{B}\,\boldsymbol{\xi} = 0, \qquad (19)$$

где матрицы $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, по определению,

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} im & -1 & 0 \\ 1 & im & 0 \\ 0 & 0 & im \end{pmatrix},$$

$$\widehat{B} = \begin{pmatrix} \Omega^2 m^2 - r(\Omega^2)'_r & 2im\Omega^2 & 0 \\ -2im\Omega^2 & \Omega^2 m^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^2 m^2 \end{pmatrix}. \qquad (20)$$

Устойчивость решений уравнения (19) легко устанавливается спектральным методом. Для $\boldsymbol{\xi}_m \sim \sim \exp(i\omega t)$ имеем дисперсионное соотношение

$$(\omega + m\Omega)^4[(\omega + m\Omega)^2 - 4\Omega^2 - r(\Omega^2)'_r] = 0,$$

из которого следует, что для спектральной устойчивости необходимо и достаточно, чтобы

$$\kappa^2 \equiv 4\Omega^2 + r(\Omega^2)'_r \geq 0. \qquad (21)$$

Величину κ иногда называют *эпициклической частотой*.

Теперь применим к данной системе наш вариационный подход. Отметим сразу, что здесь множители λ могут быть функциями r, z, поскольку величины E и E_2 являются инвариантами, даже когда интегралы в (6) и (13) берутся по потоковой трубке при фиксированных r и z. При этом изложенная выше процедура минимизации составного функционала U может быть для уравнения (19) реализована до конца и приводит в точности к условию (21), однако даже в этом случае требует несколько громоздкой алгебры. Задачу можно значительно упростить подстановкой

$$\boldsymbol{\xi} \to \boldsymbol{\xi}(t, r, z)e^{-im\Omega t},$$

что эквивалентно переходу в систему отсчета, вращающуюся на данном радиусе относительно оси z системы с частотой Ω. Уравнение для новой $\boldsymbol{\xi}$ сохраняет вид (19), однако соответствующие матрицы выглядят значительно проще:

$$\widehat{A} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \widehat{B} \to \begin{pmatrix} -r(\Omega^2)'_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Величина E_2, рассчитываемая как

$$E_2 = \frac{1}{2}\left(2\Omega\widehat{A}\dot{\boldsymbol{\xi}} - \widehat{B}\boldsymbol{\xi}\right)^2 - \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\xi}}\widehat{B}\dot{\boldsymbol{\xi}},$$

сводится в случае (22) к

$$E_2 = \frac{1}{2}\kappa^2\dot{\xi}_r^2 + \frac{1}{2}\left(2\Omega\dot{\xi}_\varphi - r(\Omega^2)'_r\xi_r\right)^2.$$

Отсюда видно, что, ограничиваясь рассмотрением E_2 в качестве функционала Ляпунова ($\lambda_2 \to \infty$ в (14)), приходим в силу положительности последнего слагаемого к искомому условию (21).

Таким образом, данный пример демонстрирует плодотворность использования инвариантов (12) при построении функционала Ляпунова.

Работа поддержана фондом "Научный потенциал", грант # 41.

1. I. B. Bernstein et al., Proc. Roy. Soc. Lond. A **244**, 17 (1958).
2. E. A. Frieman and M. Rotenberg, Rev. Mod. Phys. **32**, 898 (1960).
3. K. I. Ilin and V. A. Vladimirov, Phys. Plasmas **11**, 3586 (2004).
4. E. Hameiri, Phys. Plasmas **5**, 3270 (1998).
5. V. I. Arnold, DAN SSSR **162**, 975 (1965).
6. V. I. Arnold, Am. Math. Soc. Trans. **19**, 267 (1969).
7. В. И. Ильгисонис, В. П. Пастухов, Физика плазмы **22**, 228 (1996).
8. V. I. Ilgisonis, Proc. HSCoPP-2004, http:// www.cpt.univ-mrs.fr/hscopp04/Abstracts/ABS_Ilgisonis.txt.
9. V. I. Ilgisonis, Electronic preprint, http://arxiv.org/pdf/physics/0506073.