

Квантовая неустойчивость в резонаторной КЭД

С. В. Пранц¹⁾, М. Ю. Улейский

Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичёва Дальневосточного отд. РАН
690041 Владивосток, Россия

Поступила в редакцию 26 октября 2005 г.

Устойчивость и неустойчивость квантовой эволюции исследуется во взаимодействии двухуровневого атома с модой квантованного поля в идеальном резонаторе с учетом фотонной отдачи – базовой модели резонаторной квантовой электродинамики (КЭД). Показано, что квантовая динамика Джейнса–Каммингса может быть неустойчивой в режиме хаотического блуждания атома в квантованном поле стоячей волны в отсутствие какого бы то ни было взаимодействия с окружением. Эта неустойчивость проявляется в больших флуктуациях квантовой энтропии, коррелирующих с мерой классического хаоса – максимальным показателем Ляпунова, и в экспоненциальной чувствительности воспроизводимости квантовых состояний сильно связанной атомно-полевой системы к малым вариациям расстройки резонанса. В численных экспериментах обнаружена чувствительная зависимость атомной инверсии населенности от начальных условий и корреляции квантовых и классических степеней свободы атома.

PACS: 05.45.Mt, 05.45.Xt, 42.50.Vk

Проблема устойчивости квантовой эволюции важна сама по себе как фундаментальная проблема современной квантовой механики. Трудно переоценить ее значение для таких активно развивающихся областей, как квантовая информация и квантовые вычисления. Эта проблема – краеугольный камень квантово-классического соответствия, которое наиболее ярко проявляется в следующем противоречии: в рамках обычной квантовой механики нет места для самой концепции неустойчивости и ее экстремального проявления – динамического хаоса, безусловно существующих в природе. И дело даже не в вероятностной природе квантовой механики. В конце концов, классическую механику можно сформулировать в вероятностных терминах с помощью уравнения Лиувилля. В отличие от непрерывного классического фазового пространства фазовое пространство изолированной квантовой системы дискретно. И, следовательно, в нем не может развиваться характерное для хаоса перемешивание в объемах меньше \hbar^N , где N – число степеней свободы [1]. Выход из этой ситуации подсказывает простое соображение – реальные квантовые системы не изолированы в силу их неизбежного взаимодействия с окружением. Внешнее окружение быстро разрушает квантовую когерентность (см. литературу по декогеренции, например, [2, 3]), а слабые непрерывные измерения окружения “огрубляют” квантовую эволюцию и могут привести к квантово-классическому соответствию, включая хаос (см. ли-

тературу по обусловленной эволюции и стохастическим квантовым уравнениям, например, [4, 5]).

В этой работе мы показываем, что запутанность квантовых состояний атома и поля динамически согласована с движением центра масс атома в поле стоячей световой волны резонатора. Регулярное движение центра масс соответствует регулярной эволюции редуцированной квантовой энтропии и воспроизводимости квантовых состояний, а при его хаотическом движении квантовая эволюция становится неустойчивой. Новизна заключается в возникновении квантовой неустойчивости, характеризуемой классическим показателем Ляпунова, и проявлений динамического хаоса в квантово-классической системе без привлечения сложных моделей взаимодействия с внешним миром, роль которого играет трансляционная степень свободы атома. С помощью численных экспериментов мы демонстрируем разнообразные проявления квантово-классического соответствия, включая динамический хаос, которые можно обнаружить в реальных экспериментах с атомами и фотонами в высокочастотных резонаторах.

Мерой классической неустойчивости является максимальный показатель Ляпунова λ , характеризующий асимптотическую скорость экспоненциального разбегания двух изначально близких траекторий. Идеально изолированные квантовые системы унитарны, и их эволюция не может быть неустойчивой в классическом смысле, даже если их классические пределы хаотичны [1]. Пересом [6] в качестве меры квантовой неустойчивости была предложена величина воспроизводимости

¹⁾e-mail: prants@poi.dvo.ru

$$f(t) = |\langle \Psi_1(t) | \Psi_2(t) \rangle|^2, \quad (1)$$

являющаяся по сути перекрытием двух волновых функций Ψ_1 и Ψ_2 , равных в начальный момент времени $t = 0$, но эволюционирующих со слегка отличающимися гамильтонианами.

Запишем стандартный гамильтониан резонаторной квантовой электродинамики (КЭД):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_f\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hbar\Omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+) \cos k_f\hat{x}, \quad (2)$$

описывающий взаимодействие двухуровневого атома с нижним $|1\rangle$ и верхним $|2\rangle$ энергетическими состояниями, энергией перехода между ними $\hbar\omega_a$ и операторами Паули $\hat{\sigma}_{\pm,z}$, с модой квантованного электромагнитного поля с операторами рождения \hat{a}^\dagger и уничтожения \hat{a} , формирующей одномерную стоячую волну с частотой ω_f и волновым числом k_f в идеальном резонаторе. Положение атома с массой m_a на оси резонатора x описывается оператором \hat{x} , а его импульс – оператором \hat{p} . В результате взаимодействия происходит квантовое запутывание внутренних электронных степеней свободы атома и степеней свободы поля, описываемое вектором состояния атомно-полевой системы в момент времени t :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) |2, n\rangle + b_n(t) |1, n\rangle, \quad (3)$$

разложенным по базису фоковских полевых состояний $|n\rangle$, где $n = 0, 1, \dots$. Величины $a_n(t) \equiv \alpha_n(t) + i\beta_n(t)$ и $b_n(t) \equiv \rho_n(t) + i\eta_n(t)$ являются комплексными амплитудами вероятности обнаружить поле в состоянии $|n\rangle$, а атом в верхнем $|2\rangle$ и нижнем $|1\rangle$ энергетических состояниях, соответственно. В результате излучения и поглощения фотонов изменяется не только внутреннее состояние атома, но и его трансляционное состояние. Если атомы не слишком холодные и их средний импульс значительно превышает импульс фотона $\hbar k_f$, то допустимо классическое описание трансляционной степени свободы. Дополнительной мотивировкой такого упрощения является то обстоятельство, что в современных экспериментах [7] мониторинг положения атома в резонаторе осуществляется с помощью непрерывного слабого измерения рассеянных фотонов, в результате чего траектория атома становится классической.

Полная динамика (в рамках сделанных допущений) описывается уравнениями Гамильтона–Шредингера [8, 9], записанными в нормированном

виде в системе координат, вращающейся с частотой $\omega_f(n + 1/2)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_r p, \\ \dot{p} &= -2 \sin x \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} (\alpha_n \rho_{n+1} + \beta_n \eta_{n+1}), \\ \dot{\alpha}_n &= -\frac{\delta}{2} \beta_n - \sqrt{n+1} \eta_{n+1} \cos x, \\ \dot{\beta}_n &= \frac{\delta}{2} \alpha_n + \sqrt{n+1} \rho_{n+1} \cos x, \\ \dot{\rho}_{n+1} &= \frac{\delta}{2} \eta_{n+1} - \sqrt{n+1} \beta_n \cos x, \\ \dot{\eta}_{n+1} &= -\frac{\delta}{2} \rho_{n+1} + \sqrt{n+1} \alpha_n \cos x, \end{aligned} \quad (4)$$

где $x = k_f \langle \hat{x} \rangle$ и $p = \langle \hat{p} \rangle / \hbar k_f$ – координата атомного центра масс и его средний импульс, соответственно. Точка означает дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \Omega_0 t$, где Ω_0 – амплитудное значение атомно-полевого коэффициента взаимодействия. Уравнения (4) являются бесконечномерной нелинейной динамической системой с двумя управляющими параметрами, нормированной расстройкой резонанса $\delta = (\omega_f - \omega_a) / \Omega_0$ и нормированной частотой отдачи атома $\omega_r = \hbar k_f^2 / m_a \Omega_0 \ll 1$. Несмотря на наличие бесконечного числа интегралов движения

$$R_n = \alpha_n^2 + \beta_n^2 + \rho_{n+1}^2 + \eta_{n+1}^2 = \text{const}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} R_n \leq 1, \quad (5)$$

и сохранение полной энергии

$$\begin{aligned} W &= \frac{\omega_r p^2}{2} - \frac{\delta}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2 - \rho_{n+1}^2 - \eta_{n+1}^2) - \\ &\quad - 2 \cos x \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} (\alpha_n \rho_{n+1} + \beta_n \eta_{n+1}), \end{aligned} \quad (6)$$

эта система, вообще говоря, неинтегрируема.

Тип движения атомного центра масс сильно зависит от величины расстройки δ . При точном резонансе для атомов, приготовленных при $\tau = 0$ в одном из энергетических состояний, оптический потенциал вообще исчезает и атомы летят с постоянной скоростью $\dot{x} = \omega_r p_0$. Квантовая эволюция строго периодична с периодом $\pi / \omega_r p_0$. Точные решения для частоты состояния, квантовой энтропии фон Неймана, воспроизводимости и другие квантовые характерис-

тики нетрудно найти в явном виде. Например, инверсия атомной населенности при $\delta = 0$ имеет вид

$$z(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(0) \cos\left(\frac{2\sqrt{n+1}}{\omega_r p_0} \sin \omega_r p_0 \tau\right),$$

$$z_n = \alpha_n^2 + \beta_n^2 - \rho_{n+1}^2 - \eta_{n+1}^2. \quad (7)$$

Если расстройка достаточно велика $|\delta| \gg 0$, то ямы оптического потенциала мелкие, и атомы летят со средней скоростью $\simeq \omega_r p_0$, лишь слегка модулированной стоячей волной. Инверсия населенности также осциллирует с малой амплитудой, за исключением случая резонанса Доплера–Раби [10] при условии $|\delta| = \omega_r p_0$. Если же кинетическая энергия атома $\omega_r p^2/2$ недостаточна, чтобы преодолеть барьер оптического потенциала, то атомный центр массы совершает нелинейные колебания в одной из потенциальных ям.

Из вида уравнений Гамильтона–Шредингера (4) следует, что трансляционное движение атома описывается уравнением нелинейного осциллятора с модулированной частотой. Анализ уравнения такого типа, проведенный в работе [11], показал, что в результате взаимодействия нелинейных резонансов в соответствующем фазовом пространстве возникает стохастический слой, ширина которого зависит от δ . При умеренных расстройках $|\delta| \lesssim 1$ и подходящих значениях начального импульса атом хаотически блуждает по резонатору, и такой тип движения хорошо характеризуется положительными значениями максимального показателя Ляпунова λ . На рис. 1 пунктирной линией приведена зависимость $\lambda(\delta)$, вычисленная для уравнений (4) с начальными условиями: $x_0 = 0$, $p_0 = 25$, (а) атом приготовлен в состоянии $|2\rangle$, а поле – в когерентном состоянии со средним числом фотонов $\bar{n} = 10$ и (б) атом – в состоянии $(|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$, а поле – в фоковском состоянии с $n = 10$. Нормированная частота отдачи выбрана равной $\omega_r = 0.001$, что является разумным значением для атомов в высокодобротном оптическом микрорезонаторе в условиях сильной связи [7]).

Теперь мы хотим продемонстрировать, как классическое движение атомного центра масс коррелирует с квантовой динамикой Джейнса–Каммингса (3). В качестве меры запутывания внутриатомных и полевых состояний выберем величину, известную как чистота состояния (purity) $P(\tau) = \text{Tr} \rho_a^2(\tau)$, где $\rho_a(\tau)$ является редуцированной атомной матрицей плотности с усреднением по полевым состояниям. $P(\tau)$ максимальна, если атом находится в одном из своих энергетических состояний: $P_{\max} = \text{Tr} \rho_a^2 = \text{Tr} \rho_a = 1$.

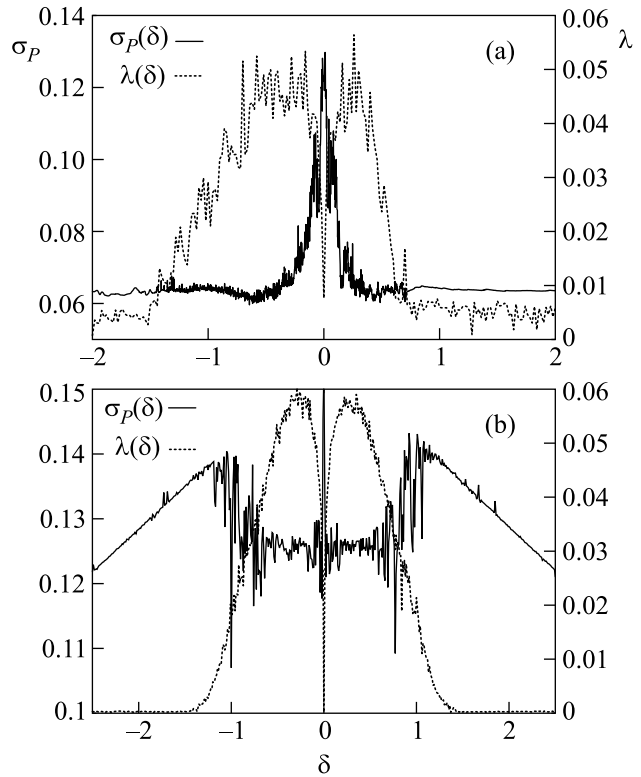


Рис. 1. Квантово-классическая корреляция зависимостей среднеквадратичного отклонения чистоты квантового состояния σ_P и максимального показателя Ляпунова λ от расстройки атомно-полевого резонанса δ для: (а) когерентного и (б) фоковского начальных состояний поля

Она принимает минимальное значение $P_{\min} = 1/2$, если $\rho_a = I/2$, где I – единичная матрица. В терминах амплитуд вероятности чистота дается формулой

$$P = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\rho_n^2 + \eta_n^2) \right)^2 + 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \rho_n + \beta_n \eta_n) \right)^2 - 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \eta_n + \beta_n \rho_n) \right)^2. \quad (8)$$

Изменяя величину расстройки резонанса δ , мы можем заставить центр масс атома двигаться в одном из описанных выше режимов: баллистический полет ($|\delta| = 0$ и $|\delta| \gg 0$), нелинейные колебания в потенциальной яме ($|\delta| \ll 1$ и достаточно малый начальный импульс) и хаотическое блуждание ($|\delta| \lesssim 1$). Из вида уравнений Гамильтона–Шредингера следует, что P должна быть сложно осциллирующей функцией времени, так как эти уравнения содержат бесконечное число несоизмеримых частот. Для выяснения различий в поведении P в разных режимах движения цент-

ра масс мы вычисляли среднеквадратичное отклонение чистоты состояния атома $\sigma_P = \sqrt{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2}$ на большом интервале времени $\tau = 2000$ для различных начальных состояний атома и поля. Зависимость этой величины от расстройки показана сплошной линией на рис.1. И для когерентного и для фоковского полей мы обнаружили, что нерегулярные колебания σ_P наблюдаются при тех же начальных условиях и в том же интервале расстроек $|\delta| \lesssim 1$, где $\lambda > 0$. Вычисленные, но не показанные здесь, вариации квантовой энтропии фон Неймана $S = -\text{Tr}_a(\rho_a \ln \rho_a)$, как и ожидалось, также коррелируют с максимальным показателем Ляпунова. Для простейшего начального состояния с атомом, приготовленным в состоянии $|2\rangle$, и полем – в фоковском состоянии $|n\rangle$ запутывание происходит между двумя квантовыми двухуровневыми системами (атомом с состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$ и полем с состояниями $|n\rangle$ и $|n+1\rangle$) и описывается всего шестью уравнениями (4) с фиксированным значением n . Чистота по формуле $P_n = \frac{1}{2}(1 + z_n^2)$ определяется осцилляциями Раби атомной инверсии населенности z_n . При $|\delta| = 0$ это периодические осцилляции, при $|\delta| \gg 0$ – регулярные амплитудно модулированные осцилляции, а при $|\delta| \lesssim 1$ (и подходящем начальном импульсе) осцилляции Раби становятся хаотическими с практически непредсказуемыми изменениями z_n при пересечении атомом узлов стоячей волны в процессе его хаотического блуждания. Хаотические осцилляции инверсии населенности z_n и чистоты атомного состояния P_n возникают только, если $\lambda > 0$.

Экспериментально измеримыми величинами являются координата атома x и инверсия населенности z . Так же как и в случае классической стоячей волны [12], хаотическое движение атома в квантованном поле имеет фрактальные свойства. Помещаем атомы по одному в начало координат ($x = 0$) с различными начальными импульсами p_0 вдоль оси x , но с одинаковыми начальными значениями прочих переменных и теми же параметрами. Вычисляем время $T(p_0)$, за которое атом с данным значением p_0 достигнет одного из ближайших к началу координат узлов стоячей волны ($x = -\pi/2$ и $x = 3\pi/2$), и число изменений направления движения атома m . Функция рассеяния $T(p_0)$ имеет самоподобную структуру с чередующимися гладкими участками и участками с плохим разрешением, последующее увеличение которых воспроизводит такую же структуру чередующихся участков. На рис.2а мы демонстрируем схему генерации кантороподобного множества начальных импульсов p_0 , при которых функция рас-

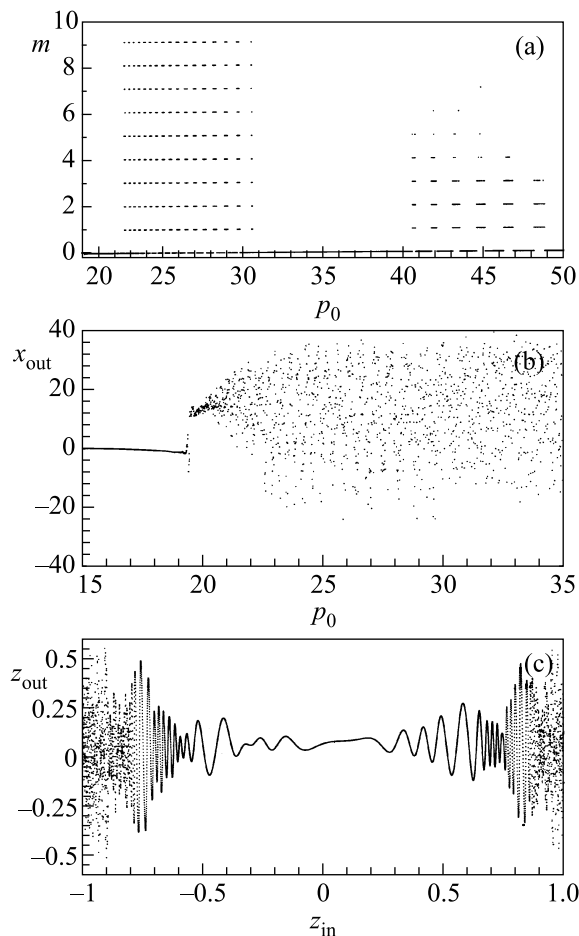


Рис.2. (а) Фрактальное множество значений начальных импульсов атомов p_0 , покидающих однопериодную стоячую волну после m изменений направления движения. (б) Зависимость выходных значений координаты атома x_{out} от начального импульса p_0 . (с) Зависимость выходных значений атомной инверсии населенности z_{out} от ее начальных значений z_{in}

сеяния имеет сингулярности. Уместно подчеркнуть, что взаимодействие классической и квантовых степеней свободы единственного атома и одной полевой моды настолько сложное, что в пределах одного периода стоячей волны найдется бесконечное множество атомных траекторий с различными p_0 , для которых $T \rightarrow \infty$. Результаты вычисления $T(p_0)$ для многих периодов стоячей волны очень похожи, однако требуют гораздо большего времени счета. Мы выяснили, что имеется бесконечное счетное множество сепаратрисоподобных траекторий, соответствующих концам отрезков на рис.2а, и несчетное множество траекторий с $m = \infty$. Проявления хаотического блуждания атомов можно обнаружить в экспериментах по 1D рассеянию атомов на стоячей световой волне. Рис.2б показывает чувствительную зависимость координаты

ты атома в фиксированный момент времени от его начального импульса p_0 . Гладкий участок этой функции для $p_0 \lesssim 20$ объясняется регулярными колебаниями атомного центра масс в первой яме, потому что соответствующие значения кинетической энергии недостаточны для преодоления потенциального барьера. Как только p_0 превышает некоторое критическое значение, становится практически невозможно предсказать даже знак координаты атома. Так называемый горизонт предсказуемости можно оценить следующим образом: $\tau_p \simeq \lambda^{-1} \ln(\Delta x / \Delta x_0)$, где Δx – доверительный интервал, а Δx_0 – неопределенность начального положения атома.

Практически важным проявлением квантовой неустойчивости в режиме хаотического блуждания атома является чувствительная зависимость инверсии населенности атома z_{out} в фиксированный момент времени от ее начального значения z_{in} при прочих равных условиях. Рис.2с демонстрирует гладкость этой функции в интервале начальных значений, $|z_{\text{in}}| \lesssim 0.8$, где движение атомного центра масс регулярно (для выбранного нами в расчете значения фазы когерентного поля), и ее сильные флуктуации в интервале $|z_{\text{in}}| > 0.8$, когда атомы хаотически блуждают по резонатору с положительным показателем Ляпунова.

Количественной характеристикой неустойчивости квантовой эволюции в резонаторной КЭД может служить воспроизводимость $f(\tau)$ – величина перекрытия (1) двух состояний $|\Psi_1(\tau)\rangle$ и $|\Psi_2(\tau)\rangle$, идентичных при $\tau = 0$, но эволюционирующих под действием двух гамильтонианов (2) со слегка различающимися значениями расстройки $\Delta\delta = \delta - \delta'$:

$$f(\tau) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \alpha'_n + \beta_n \beta'_n + \rho_n \rho'_n + \eta_n \eta'_n) \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \beta'_n - \beta_n \alpha'_n + \rho_n \eta'_n - \eta_n \rho'_n) \right)^2, \quad (9)$$

где величины без штриха соответствуют гамильтониану с расстройкой δ , а со штрихом – гамильтониану с расстройкой δ' . Мы обнаружили четкую корреляцию этой характеристики квантовой эволюции с классической характеристикой движения. Если движение атомного центра масс регулярно и характеризуется нулевым показателем Ляпунова, то квантовая динамика атомно-полевой системы устойчива и характеризуется малым значением величины невоспроизводимости $1 - f$. Если движение атомного центра масс хаотическое с $\lambda > 0$, то невоспроизводимость экспоненциально быстро увеличивается со временем

с показателем, равным λ . Пример устойчивой квантовой эволюции приведен на рис.3 пунктирной линией

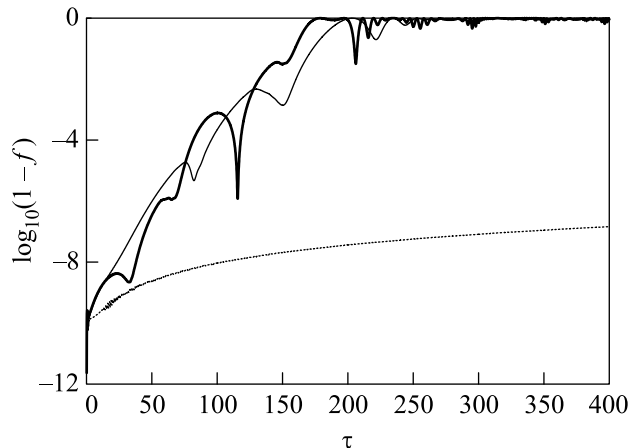


Рис.3. Эволюция невоспроизводимости квантового состояний атомно-полевой системы $1 - f(\tau)$ (логарифмический масштаб) для хаотического (жирная и тонкая линии) и регулярного (пунктирная линия) движения центра масс атома

ей (атом приготовлен в суперпозиционном состоянии с $z(0) = 0$, его трансляционное движение регулярно и $\lambda = 0$). Совершенно другая картина наблюдается, когда атом приготовлен в одном из своих энергетических состояний, $z(0) = \pm 1$. В этом случае и классическое движение центра масс и квантовая динамика неустойчивы, невоспроизводимость быстро увеличивается со временем с максимальным показателем Ляпунова ($\lambda \simeq 0.04$ для выбранных значений параметров и начальных условий), являющимся классической мерой динамического хаоса (см. тонкую и жирную кривые на рис.3, построенные для $\Delta\delta = 10^{-4}$).

Итак, мы установили, что наличие одной классической степени свободы, естественно возникающей в базовой модели резонаторной КЭД и динамически связанной с квантовыми степенями свободы, достаточно для возникновения сложной квантовой динамики, включая неустойчивость и динамический хаос. Для этого не обязательно требуется наличие бесконечного резервуара, моделирующего внешнее окружение, и/или шума, вызванного слабыми непрерывными измерениями. Показано, что квантовая неустойчивость количественно характеризуется величиной максимального показателя Ляпунова, что обеспечивает квантово-классическое соответствие в базовой модели резонаторной КЭД.

Работа выполнена при поддержке грантов Президиума Дальневосточного отделения РАН и Программы Президиума РАН “Математические методы в нелинейной динамике”.

-
1. B. V. Chirikov, *Chaos* **1**, 95 (1991).
 2. W. H. Zurek, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 715 (2003).
 3. D. Giulini et al., *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*, 2nd ed., Springer, New York, 2003.
 4. S. Ghose, P. Alsing, I. Deutsch et al., *Phys. Rev. E* **67**, 052102 (2003).
 5. H. Carmichael, *An Open System Approach to Quantum Optics*, Springer Verlag, Berlin, 1993.
 6. A. Peres, *Phys. Rev. A* **30**, 1610 (1984).
 7. P. Horak, H. Ritsh, T. Fischer et al., *Phys. Rev. Lett.* **88**, 043601 (2002); T. W. Lynn, K. Birnbaum, and H. J. Kimble, E-print quant-ph/0507064 (2005); S. Husmann et al., E-print quant-ph/0506088 (2005).
 8. С. В. Пранц, *Вестник ДВО РАН* № 2, 30 (2003).
 9. S. V. Prants and M. Yu. Uleysky, *Phys. Lett. A* **309**, 357 (2003).
 10. M. Yu. Uleysky, L. E. Kon'kov, and S. V. Prants, *Comm. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* **8**, 329 (2003).
 11. С. В. Пранц, *Письма в ЖЭТФ* **75**, 71 (2002).
 12. В. Ю. Аргонов, С. В. Пранц, *ЖЭТФ* **123**, 946 (2003).