

Распад капиллярной турбулентности на поверхности вязкой жидкости

Г. В. Колмаков¹⁾

Институт физики твердого тела РАН, 142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 2 декабря 2005 г.

После переработки 16 декабря 2005 г.

Изучен распад турбулентности капиллярных волн на поверхности реальной жидкости с учетом вязкого затухания волн на всех частотах при ступенчатом выключении внешней накачки. Рассмотрение проведено для двух различных моделей – приближения слабой турбулентности и локальной модели турбулентности, в которой поток энергии по масштабам частот описывается полиномиальным выражением по числам заполнения волн. Показано, что при учете конечной вязкости жидкости распад турбулентности происходит автомодельным образом и начинается с области высоких частот. В процессе распада распределение энергии волн по частотам близко к своему стационарному виду $E_\omega \sim \omega^{-3/2}$ в широком интервале частот, меньших граничной частоты инерционного интервала, в течение относительно длительного времени после выключения внешней силы. Результаты расчета качественно согласуются с результатами экспериментов по изучению капиллярной турбулентности на заряженной поверхности жидкого водорода.

PACS: 47.27.-i, 47.35.+i

1. В данной работе представлены результаты изучения распада капиллярной турбулентности на поверхности вязкой жидкости после ступенчатого выключения внешней накачки.

В существующей теории капиллярной турбулентности [1, 2] рассмотрен случай, когда вязким затуханием волн на поверхности жидкости можно пренебречь в широком интервале частот, а диссипативные потери учитываются в виде граничных условий к соответствующим уравнениям на некотором высокочастотном масштабе $\omega_b \gg \omega_p$, где ω_p – частота внешней накачки. Из существующей теории, в частности, следует, что распад турбулентности должен начинаться с низкочастотной части спектра и сопровождаться движением фронта распада в высокочастотную часть спектра.

Как показали недавние эксперименты по изучению капиллярной турбулентности на заряженной поверхности жидкого водорода [3–5], распад турбулентности начинается с высокочастотной области спектра, и край инерционного интервала сдвигается со временем в сторону более низких частот. В низкочастотной области спектра турбулентное распределение остается близким к своему невозмущенному виду в течение относительно длительного времени после выключения внешней накачки. Характерное время релаксации всего каскада после ступенчатого

выключения внешней накачки оказывается порядка времени линейного вязкого затухания капиллярной волны на частоте, равной частоте накачки. Таким образом, для понимания характера нестационарных турбулентных явлений принципиально важным оказывается учет вязкого затухания волн на всех частотах. Как показал анализ литературы (см., например, монографию [2]), распад капиллярной турбулентности на поверхности вязкой жидкости ранее не рассматривали.

В настоящей статье изучен процесс распада турбулентности капиллярных волн на поверхности жидкости с учетом вязкого затухания волн на всех частотах. Вязкость жидкости предполагается достаточно малой, так что граничная частота инерционного интервала ω_b много больше частоты накачки ω_p . Рассмотрение проведено в рамках двух различных моделей – в приближении слабой турбулентности и в локальной модели турбулентности, в которой поток энергии по масштабам частот описывается полиномиальным выражением по числам заполнения волн. Показано, что распад турбулентности происходит автомодельным образом, причем автомодельное распределение отличается от того, что следует из теории [2] в пределе бесконечно малой вязкости жидкости. Определена зависимость ширины инерционного интервала от времени после ступенчатого выключения внешней накачки для найденного режима распада турбулентности, а также изучены свойства

¹⁾e-mail: kolmakov@issp.ac.ru

соответствующего автомодельного решения. Результаты приведенных аналитических и численных расчетов качественно согласуются с экспериментальными наблюдениями [3, 4].

В теории волновой турбулентности [1, 2] временная эволюция распределения чисел заполнения $n_{\mathbf{k}} = \langle a_{\mathbf{k}}(t)a_{\mathbf{k}}^*(t) \rangle$ для капиллярных волн, где $a_{\mathbf{k}}(t)$ – каноническая амплитуда волны с волновым вектором \mathbf{k} , зависящая от времени t , описывается кинетическим уравнением

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \text{St}(n_{\mathbf{k}}) - 2\gamma_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}} + F_{\mathbf{k}}(t). \quad (1)$$

Здесь

$$\text{St}(n_{\mathbf{k}}) = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 (R_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} - R_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k},\mathbf{k}_2} - R_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}})$$

– интеграл столкновений, где

$$R_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} = \pi |V_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}|^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2}) \times [n_{\mathbf{k}_1}n_{\mathbf{k}_2} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}_1} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}_2}],$$

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} = \left(\frac{1}{8\pi}\right) \left(\frac{\sigma}{4\rho^3}\right)^{1/4} \left[(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 + k_1k_2) \left(\frac{k_1k_2}{k}\right)^{1/4} + (\mathbf{k}\mathbf{k}_1 - kk_1) \left(\frac{kk_1}{k_2}\right)^{1/4} + (\mathbf{k}\mathbf{k}_2 - kk_2) \left(\frac{kk_2}{k_1}\right)^{1/4} \right]$$

– амплитуда нелинейного взаимодействия капиллярных волн, $\gamma_{\mathbf{k}} = 2\nu k^2$ – коэффициент вязкого затухания капиллярных волн, ν – кинематическая вязкость жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность жидкости, $F_{\mathbf{k}}(t)$ – внешняя возбуждающая сила. Частота капиллярной волны $\omega_{\mathbf{k}}$ и ее волновой вектор k связаны законом дисперсии

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = (\sigma/\rho)k^3. \quad (2)$$

В случае накачки низкочастотным шумом (ширина интервала частот накачки сравнима с характерной частотой накачки ω_p) в инерционном интервале частот $\omega_p \ll \omega \ll \omega_b$, в котором нелинейная трансформация волн превалирует над вязким затуханием, уравнение (1) имеет стационарное решение

$$n_{\mathbf{k}} = AP^{1/2}k^{-17/4}, \quad (3)$$

описывающее изотропный спектр капиллярной турбулентности (колмогоровский спектр), см. расчет [1]

и наблюдения [6, 7]. Здесь A – численный коэффициент, P – поток энергии в область высоких частот. На высоких частотах порядка граничной частоты инерционного интервала ω_b нелинейный перенос энергии сменяется вязким затуханием волн, что приводит к экспоненциально быстрому убыванию чисел заполнения $n_{\mathbf{k}}$. С увеличением амплитуды накачки положение высокочастотного края инерционного интервала ω_b смещается в сторону более высоких частот, то есть инерционный интервал расширяется [8].

2. В соответствии с результатами наблюдений и численных расчетов [3, 4] естественно предположить, что в силу значительного различия характерного диссипативного масштаба частот ω_b и частоты накачки ω_p распад турбулентности происходит автомодельным образом. Будем искать нестационарное решение кинетического уравнения, описывающее распад турбулентного каскада после ступенчатого выключения внешней накачки (“свободный” распад), в следующем виде:

$$n_{\mathbf{k}} = 4\nu k_b^\alpha(t) g(\xi), \quad (4)$$

где $k_b(t)$ – зависящее от времени положение высокочастотной границы инерционного интервала (в масштабах волновых векторов), $g(\xi)$ – некоторая функция автомодельной переменной $\xi = k/k_b(t)$, α – некоторый показатель степени. Численный множитель в правой части (4) выделен для удобства дальнейших расчетов. Будем предполагать, что внешняя накачка выключается ступенчатым образом в момент времени $t = 0$, то есть $F_{\mathbf{k}}(t) = 0$ при $t \geq 0$. После подстановки функции (4) в кинетическое уравнение (1) в котором положено $F_{\mathbf{k}} = 0$, интеграл столкновений оказывается пропорционален $\text{St}[n] \propto k_b^{2\alpha+5}$, а диссипативное слагаемое пропорционально $\gamma_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}} \propto k_b^{\alpha+2}$. Оставаясь в рамках предположения об автомодельном характере эволюции спектра, мы должны положить $2\alpha + 5 = \alpha + 2$, что соответствует показателю степени в (4), равному

$$\alpha = -3. \quad (5)$$

Кинетическое уравнение (1) после подстановки (4) с значением показателя α из (5) приобретает следующий вид

$$-(1/4\nu)(3g(\xi) + \xi g'(\xi))k_b(t)^{-3} \dot{k}_b(t) = I(\xi) - \xi^2 g(\xi), \quad (6)$$

где точка обозначает дифференцирование по времени, штрих обозначает дифференцирование по переменной ξ , а $I(\xi)$ – квадратичный по $g(\xi)$ интегральный оператор, определенный следующим равенством:

$$\text{St}(n_{\mathbf{k}}(t)) = k_b(t)^{-1} I(\xi).$$

Для того чтобы в уравнение (5) входила только автомодельная переменная ξ , величина $k_b(t)$ должна подчиняться следующему уравнению:

$$k_b^{-3} \dot{k}_b = -C, \quad (7)$$

где C – некоторая константа; $C > 0$ в соответствии с тем, что со временем край инерционного интервала сдвигается в сторону низких частот. Уравнение (7) имеет решение

$$k_b(t) = \frac{k_b(0)}{\sqrt{1 + t/\tau}}, \quad (8)$$

где $k_b(0)$ – положение края инерционного интервала в момент выключения внешней накачки $t = 0$, а характерное время распада турбулентности равно $\tau = 1/2Ck_b(0)$. Из уравнения (8) следует, что зависимость граничной частоты инерционного интервала от времени описывается выражением

$$\omega_b(t) = \frac{\omega_b(0)}{(1 + t/\tau)^{3/4}}. \quad (9)$$

При $t \gg \tau$ граничная частота инерционного интервала зависит от времени как $\omega_b(t) \sim t^{-3/4}$.

Константа $C/4\nu$ может быть исключена из уравнения (5), в которое подставлено решение (8), при помощи следующей замены переменных

$$\xi \rightarrow (C/4\nu)^{1/2} \xi \quad g \rightarrow (C/4\nu)^{-3/2} g. \quad (10)$$

После преобразования (10) уравнение для автомодельной функции $g(x)$ приобретает следующий вид

$$3g(\xi) + \xi g'(\xi) - I(\xi) + \xi^2 g(\xi) = 0. \quad (11)$$

Ниже предполагается, что такая замена переменных произведена.

Граничные условия к интегро-дифференциальному уравнению (11) имеют следующий вид

$$P_k \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow 0, \quad (12)$$

$$g(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty, \quad (13)$$

где

$$P_k = -2\pi \int_0^k dk' k' \omega_{k'} \text{St}(n_{k'}) \quad (14)$$

– поток энергии в K -пространстве в область больших волновых векторов [2]. Условие (12) соответствует отсутствию внешней низкочастотной накачки при $t > 0$. В рассматриваемом случае свободного

распада турбулентности, когда спектр волн описывается уравнением (4) с показателем степени из (5), выражение (14) для потока энергии принимает следующий вид:

$$P_k = -2\pi \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{1/2} k_b(t)^{5/2} \int_0^{\xi_k(t)} d\xi \xi^{5/2} I(\xi), \quad (15)$$

где $\xi_k(t) = k/k_b(t)$. Для того чтобы в области малых волновых векторов выполнялось граничное условие (12), автомодельная функция должна удовлетворять следующему условию

$$g(\xi) \leq \text{const} \cdot \xi^{-m} \quad \text{при } \xi \rightarrow 0, \quad (16)$$

где $m < m_0$, а $m_0 = 17/4$ – взятый с обратным знаком колмогоровский показатель степени в стационарном спектре (3).

Укажем асимптотики функции $g(\xi)$ в различных областях волновых векторов (предполагается, что $k > k_p$, где k_p – величина волнового вектора капиллярной волны с частотой порядка характерной частоты накачки ω_p). При $\xi \ll 1$ можно пренебречь нелинейным и диссипативным слагаемыми в уравнении (11). В этом случае автомодельная функция равна

$$g(\xi) = \text{const} \cdot \xi^{-3}. \quad (17)$$

Согласно уравнениям (4) и (17), в случае автомодельного распада турбулентности спектр волн с малыми волновыми векторами $k \ll k_b$ имеет вид

$$n_k = \text{const} \cdot k^{-3} \quad (18)$$

и не зависит от времени t . Отметим, что спектр волн (18), формирующийся в области малых k , отличается от стационарного спектра (3). Распределение энергии капиллярных волн по частотам

$$E_\omega = 2\pi k \omega n_k (dk/d\omega) \quad (19)$$

(ω – частота волны с волновым вектором k) в области низких частот $\omega \ll \omega_b$ принимает, согласно уравнению (18), следующий вид:

$$E_\omega = \text{const} \cdot \omega^{-2/3}. \quad (20)$$

При $\xi \gg 1$ нелинейное слагаемое $I(x)$ пренебрежимо мало в силу малости функции $g(\xi)$, пропорциональной числу заполнения n_k . Из уравнения (11) тогда получаем

$$g(\xi) = \text{const} \cdot \xi^{-3} \exp(-\xi^2/2). \quad (21)$$

Таким образом, спектр волн в диссипативной области $k \gg k_b$, в которой вязкое затухание преобладает

над нелинейным переносом энергии, экспоненциально падает с ростом волнового вектора по закону

$$n_{\mathbf{k}}(t) = \text{const} \cdot k^{-3} \exp\left(-\frac{k^2}{2k_b(t)^2}\right). \quad (22)$$

Распределение энергии на высоких частотах $\omega \gg \omega_b$ имеет следующий вид:

$$E_{\omega}(t) = \text{const} \cdot \omega^{-2/3} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_b(t)}\right)^{4/3}\right). \quad (23)$$

Из уравнений (17) и (21) следует, что автомодельная функция удовлетворяет требуемым граничным условиям (13) и (16).

В промежуточной области волновых векторов $k \sim k_b$ вид функции $g(\xi)$ зависит от амплитуды волн на поверхности, то есть от амплитуды внешней накачки до ее выключения. При малых амплитудах накачки функция $g(\xi)$ мала, $g \ll 1$. В этом случае нелинейным по $g(\xi)$ слагаемым в уравнении (11) можно пренебречь, и спектр волн оказывается близким к диссипативному распределению (22). Отметим, что при $\xi \ll 1$ зависимость (22) переходит в зависимость (18), и, следовательно, в случае малых амплитуд накачки выражение (22) описывает спектр капиллярных волн $n_{\mathbf{k}}(t)$ при $t > 0$ во всем интервале волновых векторов $k > k_p$. Зависимость (22) становится неприменимой при очень больших временах $t \sim \tau(k_b(0)/k_p)^2$, при которых $k_b(t) \sim k_p$ и ширина инерционного интервала стремится к нулю.

При больших амплитудах накачки, когда $g \gg 1$ при $\xi \sim 1$, нелинейное слагаемое $I(\xi)$ в уравнении (11) доминирует, и

$$g(\xi) \sim \xi^{-17/4} \quad (24)$$

в силу того, что спектр (3) является стационарным решением кинетического уравнения в отсутствие вязкости. Это соответствует формированию в области промежуточных $k \sim k_b$ асимптотики следующего вида

$$n_{\mathbf{k}}(t) = \text{const} \cdot k_b(t)^{5/4} k^{-17/4}. \quad (25)$$

Из этого уравнения следует, что при достаточно больших амплитудах накачки зависимость спектра волн $n_{\mathbf{k}}$ от волнового вектора k в промежуточной области волновых векторов $k \sim k_b$ совпадает со стационарным степенным распределением (3). Эффективный поток энергии P_{eff} , определяемый соотношением $n_{\mathbf{k}}(t) = AP_{\text{eff}}(t)^{1/2} k^{-17/4}$, зависит от времени следующим образом

$$P_{\text{eff}}(t) = (k_b(t)/k_b(0))^{5/2} P_0,$$

где P_0 – величина потока в стационарном состоянии до выключения внешней накачки. Согласно уравнению (8), при больших временах $t \gg \tau$ величина эффективного потока энергии стремится к нулю по закону $P_{\text{eff}} = (t/\tau)^{-5/4} P_0$. Соответственно, распределение энергии волн в промежуточной области частот $\omega \sim \omega_b$ имеет вид

$$E_{\omega} \sim \omega_b(t)^{5/6} \omega^{-3/2}. \quad (26)$$

Таким образом, при распаде турбулентности в автомодельном режиме распределение амплитуд волн по частотам в этом интервале частот уменьшается однородным образом с увеличением времени t , сохраняя свой квазистационарный вид (3). Этот вывод найдется в качественном соответствии с результатами наблюдений [3, 4].

Согласно уравнению (9), полная энергия системы капиллярных волн (19) уменьшается при $t > 0$ по закону

$$E = \int d\omega E_{\omega} = 8\pi\nu B(\alpha/\rho)^{1/3} \omega_b(t)^{1/3}, \quad (27)$$

где константа B равна

$$B = \int_0^{\infty} d\xi \xi^{5/2} g(\xi).$$

Основная часть энергии оказывается сосредоточенной на частотах $\omega \sim \omega_b$, в отличие от стационарного распределения (3), где основная часть энергии сосредоточена на частотах порядка частоты накачки ω_p . Из этого следует, что истинное распределение волн $n_{\mathbf{k}}$ при распаде турбулентности стремится к распределению (4) асимптотически на достаточно больших временах t . При $t \gg \tau$ полная энергия стремится к нулю по закону $E \sim (t/\tau)^{-1/4}$. Отметим, что поток энергии $P_{\mathbf{k}}$, определенный выражением (15), также имеет максимум в области волновых векторов $k \sim k_b$.

3. Уравнение (11) для автомодельной функции $g(\xi)$ может быть решено только численно. Такое численное исследование свойств решений уравнения (11) представляет собой самостоятельную задачу и будет опубликовано отдельно. Ниже приведены результаты расчета автомодельной функции, проведенного в рамках упрощенной модели, в которой, в отличие от теории [1], предполагается, что поток энергии по масштабам волновых векторов дается полиномиальным по $n_{\mathbf{k}}$ выражением – так называемое “локальное” приближение в теории турбулентности. Применимость такого приближения при изучении распада капиллярной турбулентности основывается на локальности спектра турбулентности, следующей из

сходимости интеграла столкновений $St(n_k)$ при подстановке в него автомодельного решения (4) с асимптотиками вида (18), (22) и (25) (подробно вопрос о локальности спектров слабой турбулентности исследован в монографии [2]). Физически это означает, что эволюция турбулентного распределения капиллярных волн определяется, в основном, взаимодействием волн с близкими частотами. Аналогичные локальные модели были успешно использованы ранее при численном изучении распада капиллярной турбулентности на поверхности жидкости [3], изучении турбулентности гравитационных волн [9] и оптической турбулентности [10].

В наиболее простом варианте локальной модели капиллярной турбулентности поток энергии по масштабам частот волн записывается в следующем виде

$$P_\omega = \text{const} \cdot \omega^3 E_\omega^2. \quad (28)$$

Для удобства сравнения результатов расчета с экспериментальными данными мы перешли здесь от волнового вектора k к частоте волны ω в качестве независимой переменной, а также выразили n_k через энергию волн E_ω (19) с частотой $\omega = \omega(k)$. Связь между ω и k для капиллярных волн описывается уравнением (2). В данной модели уравнение, аналогичное кинетическому уравнению (1) в теории волновой турбулентности, имеет следующий вид

$$\frac{\partial E_\omega}{\partial t} + \frac{\partial P_\omega}{\partial \omega} + \nu_0 \omega^{4/3} E_\omega = F_\omega(t), \quad (29)$$

где P_ω дается выражением (28), а $\nu_0 = 4\nu(\rho/\alpha)^{2/3}$. В дальнейшем для упрощения формул мы будем полагать $\text{const}=1$ в (28), что соответствует изменению единиц измерения времени t и частоты ω .

В модели (28) – (29) стационарное распределение энергии волн по частотам E_ω описывается при частотах $\omega > \omega_p$ уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \omega}(\omega^3 E_\omega^2) + \nu_0 \omega^{4/3} E_\omega = 0,$$

откуда для стационарного состояния получаем

$$E_\omega = \omega^{-3/2} \left(P^{1/2} - \frac{3}{5} \nu_0 \omega^{5/6} \right), \quad (30)$$

Таким образом, в данной модели амплитуды волн в стационарном состоянии отличны от нуля лишь в конечном интервале частот $\omega \leq \omega_b$, где граничная частота равна

$$\omega_b = (5/3\nu_0)^{6/5} P^{3/5}. \quad (31)$$

При частотах, малых по сравнению с граничной частотой ω_b (но больших частоты накачки ω_p), из (30) получаем

$$E_\omega = P^{1/2} \omega^{-3/2}. \quad (32)$$

Распределение (32) соответствует степенному решению (3) кинетического уравнения (1).

Автомодельному решению (4), (5), описывающему эволюцию свободно распадающегося турбулентного каскада, соответствует решение уравнения (29) локальной модели (с внешней накачкой $F_\omega = 0$) следующего вида:

$$E_\omega(t) = \nu_0 \omega_b(t)^{-2/3} f(x), \quad (33)$$

где $x = \omega/\omega_b(t)$ – автомодельная переменная, определенная в масштабе частот волн. Уравнение для автомодельной функции $f(x)$, аналогичное уравнению (11), имеет вид

$$\frac{2}{3} f(x) + x f'(x) + \frac{\partial}{\partial x} x^3 f^2(x) + x^{4/3} f(x) = 0. \quad (34)$$

Асимптотики решения уравнения (34) в различных областях частот имеют следующий вид (частоты предполагаются большими по сравнению с характерной частотой накачки ω_p):

$$f(x) = \text{const} \cdot x^{-2/3} \quad \text{при } x \ll 1, \quad (35)$$

$$f(x) = \text{const} \cdot x^{-2/3} \exp(-3x^{4/3}/4) \quad \text{при } x \gg 1. \quad (36)$$

При больших амплитудах накачки, что соответствует $f(x) \gg 1$ при $\xi \sim 1$, квазистационарная асимптотика имеет следующий вид:

$$f(x) = \text{const} \cdot x^{-3/2}. \quad (37)$$

Для чисел заполнения волн n_k получаем, соответственно, выражения (18), (22) и (25). Таким образом, вид асимптотик чисел заполнения оказывается не зависящим от выбора конкретной модели.

На рис.1 представлен результат численного расчета автомодельной функции $f(x)$ из уравнения (34) при четырех различных значениях величины $f_1 = f(x)|_{x=1}$ (что качественно соответствует различным амплитудам накачки до ее выключения). Как следует из рис.1, при $x \ll 1$ функция $f(x)$ описывается асимптотическим выражением (35). Из рисунка видно также, что при $f_1 \geq 10$ в достаточно широком интервале частот формируется квазистационарная асимптотика (37). При $f_1 = 0.1$ функция $f(x)$ хорошо описывается зависимостью (36) при всех x в соответствии с нашим предыдущим рассмотрением.

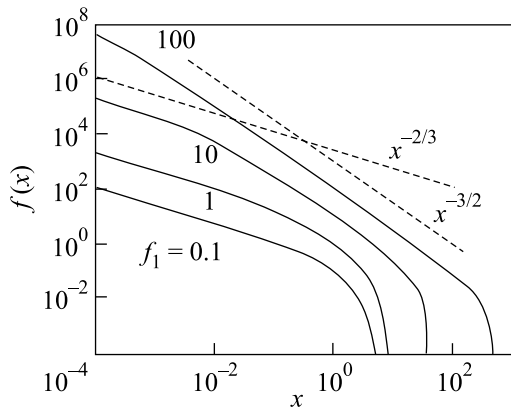


Рис.1. Результат численного расчета автомодельной функции $f(x)$ при $f_1 = 100, 10, 1$ и 0.1 , представленный в логарифмических координатах. Пунктирные прямые соответствуют степенным зависимостям (35) и (37)

Мы провели также численное изучение распада капиллярной турбулентности на основании модели (28), (29). На рис.2 показан результат численного расчета эволюции распределения E_ω энергии волн по

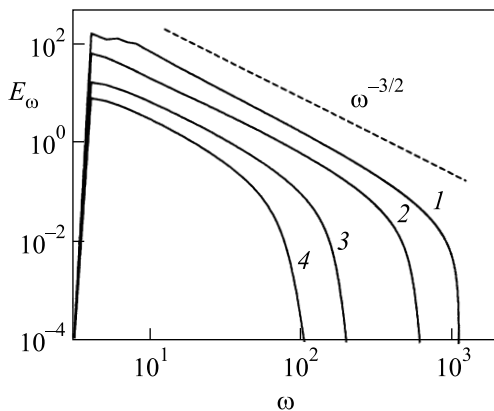


Рис.2. Эволюция со временем распределения энергии E_ω капиллярных волн по частоте после выключения внешней возбуждающей силы: $t = 0$ (стационарный спектр, кривая 1), $t = 0.5$ (кривая 2), $t = 2.0$ (кривая 3) и $t = 4.0$ (кривая 4). Пунктирная прямая соответствует степенной зависимости $E_\omega = \text{const} \cdot \omega^{-3/2}$.

частотам после ступенчатого выключения внешней широкополосной накачки. Внешняя накачка выключается в момент времени $t = 0$. Частота накачки близка к $\omega_p = 1$. Время t и частота ω указаны в безразмерных единицах. На рисунке показано распределение E_ω в моменты времени $t = 0$ (стационарный спектр), $0.5, 2.0$ и 4.0 . Пунктирная прямая соответствует зависимости (32) $E_\omega = \text{const} \cdot \omega^{-3/2}$. Из расчета следует, что частотная зависимость распределения энергии E_ω в инерционном интервале близка

к стационарной зависимости (32) в течение относительно длительного времени поле выключения внешней накачки. Граничная частота инерционного интервала сдвигается с ростом времени t в сторону низких частот.

Полученное в результате расчета распределение энергии E_ω было аппроксимировано при $t > 0$ и $\omega > \omega_p$ распределением (33) с функцией $f(x)$, вычисленной для $f_1 = 10$ (см. рис.1). В качестве подгоночных параметров были выбраны граничная частота инерционного интервала $\omega_b(t)$ и общий нормировочный множитель в (33). Полученная зависимость $\omega_b(t)$ показана на рис.3 квадратами. Размер квад-

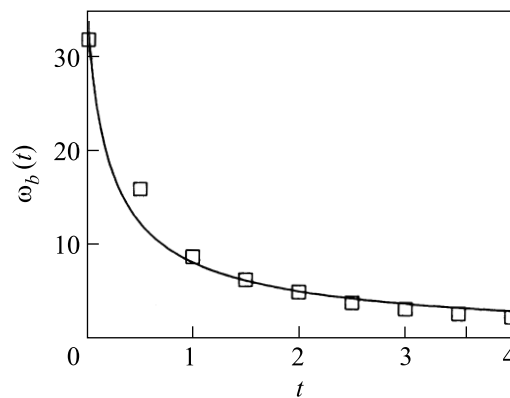


Рис.3. Зависимость от времени граничной частоты инерционного интервала $\omega_b(t)$, полученная по результатам численных расчетов (квадраты); сплошная кривая: зависимость $\omega_b(t)$, построенная по формуле (9) при $\omega_b(0) = 32.7$ и $\tau = 0.187$

ратов соответствует ошибке определения частоты ω_b по результатам численного расчета. Для сравнения на рис.3 показана зависимость (9) (сплошная кривая) для значений параметров $\omega_b(0) = 32.7$ и $\tau = 0.187$ (в используемых безразмерных единицах). Как следует из рис.1–3, результаты автомодельного описания распада капиллярной турбулентности при учете вязких потерь качественно согласуются с результатами численных расчетов.

В экспериментах по распаду капиллярной турбулентности на поверхности жидкого водорода [3, 4] относительная ширина инерционного интервала составляет $\omega_b/\omega_p \sim 50\text{--}100$ в момент выключения внешней накачки. Из модели (28), (29) следует, что в случае накачки низкочастотным шумом характерное время нелинейного взаимодействия волн с характерной частотой ω равно $\tau_n \sim 1/\omega^2 E_\omega \sim \omega^{-1/2}$, а характерное время вязкого затухания волн с той же частотой равно $\tau_v \sim \omega^{-4/3}$. Их отношение составляет величину $\tau_v/\tau_n \sim \omega^{-5/6}$. Если в соответствии с

результатами работы [8] предположить, что на частотах порядка граничной частоты инерционного интервала $\omega \approx \omega_b$ отношение $\tau_v/\tau_n \sim 1$, то на частотах порядка частоты накачки это отношение оказывается $\tau_v/\tau_n \sim (\omega_b/\omega_p)^{5/6} \sim 25 - 50$ в момент выключения накачки и быстро уменьшается в процессе распада турбулентности. В случае накачки на одной резонансной частоте стационарный спектр капиллярной турбулентности близок к $n_k \sim k^{-21/4}$, что соответствует распределению энергии в инерционном интервале $E_\omega \sim \omega^{-13/6}$ (см. расчет [11] и наблюдения [6]). Характерное время нелинейного взаимодействия оказывается $\tau_n \sim \omega^{1/6}$, а отношение нелинейного и вязкого времен на частоте накачки $\tau_v/\tau_n \sim (\omega_b/\omega_p)^{3/2} \sim 10^2 - 10^3$. Таким образом, даже при сравнительно большой величине отношения τ_v/τ_n вязкость играет существенную роль при затухании волн на поверхности жидкого водорода.

4. Итак, в работе изучен распад капиллярной турбулентности на поверхности жидкости после ступенчатого выключения внешней возбуждающей силы с учетом вязкого затухания волн на всех частотах. Из результата расчета следует, что распад турбулентности начинается с области высоких частот. При достаточно больших начальных амплитудах возбуждающей силы распределение энергии волн по частотам близко к своему стационарному виду $E_\omega \sim \omega^{-3/2}$ в широком интервале частот $\omega < \omega_b$, где ω_b – граничная частота инерционного интервала, в течение относительно длительного времени после выключения внешней силы. После выключения внешней силы граничная частота ω_b уменьшается, и при больших временах $t \gg \tau$, где τ – характерное время распада турбулентности, $\omega_b(t) \sim t^{-3/4}$. Полученные резуль-

таты качественно согласуются с результатами экспериментов [3, 4] по изучению распада капиллярной турбулентности на поверхности жидкого водорода.

Автор благодарен Л. П. Межову-Деглину, А. А. Левченко и М. Ю. Бражникову за многочисленные обсуждения, а также В. Е. Захарову и Е. А. Кузнецову за интерес к работе. Исследования выполнены при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант # 05-02-17849 и программы Президиума РАН РФ “Квантовая макрофизика”.

1. V. E. Zakharov and N. N. Filonenko, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **4**, 506 (1967).
2. V. E. Zakharov, G. Falkovich, and V. S. L'vov, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I*, Springer, Berlin, 1992.
3. G. V. Kolmakov, A. A. Levchenko, M. Yu. Brazhnikov et al., *Phys. Rev. Lett.* **93**, 074501 (2004).
4. М. Ю. Бражников, Г. В. Колмаков, А. А. Левченко и др., Письма в ЖЭТФ **80**, 99 (2004).
5. М. Ю. Бражников, Г. В. Колмаков, А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, Письма в ЖЭТФ **82**, 642 (2005).
6. М. Ю. Бражников, Г. В. Колмаков, А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, Письма в ЖЭТФ **73**, 443 (2001).
7. М. Ю. Бражников, Г. В. Колмаков, А. А. Левченко, ЖЭТФ **122**, 521 (2002).
8. М. Ю. Бражников, Г. В. Колмаков, А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, Письма в ЖЭТФ **74**, 660 (2001).
9. C. Connaughton, A. C. Newell, and Y. Pomeau, *Physica D* **184**, 64 (2003).
10. S. Dyachenko, A. C. Newell, A. Pushkarev, and V. E. Zakharov, *Physica D* **57**, 96 (1992).
11. Г. Е. Фалькович, А. Б. Шафаренко, ЖЭТФ **94**, 172 (1988).