

О релаксации параметра порядка в модели БКШ

С. В. Иорданский, Р. Б. Сапцов

Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 марта 2006 г.

Рассматривается релаксация неравновесного значения параметра порядка (волновой функции пар) в однородном случае для “чистого” сверхпроводника, обусловленная электрон-фононным взаимодействием. Показано, что время релаксации параметра порядка велико по сравнению с временем между электрон-электронными соударениями. Это связано с малостью температуры сверхпроводящего перехода по сравнению как с энергией Ферми, так и с дебаевской энергией в модели БКШ.

PACS: 74.20.Fg

Кинетика, то есть неравновесные свойства сверхпроводников, являются объектом интенсивных теоретических и экспериментальных исследований фактически с момента возникновения микроскопической теории БКШ – Боголюбова [1, 2]. Имеется обширная литература, посвященная поведению сверхпроводников при воздействии внешних полей или инжектировании неравновесных носителей заряда. Результаты основополагающих работ просуммированы в сборнике статей [3] и книге [4].

Основная трудность при микроскопическом описании связана с большим размером куперовских пар по сравнению с межэлектронным расстоянием и рассмотрением механизма возникновения бозе-конденсата пар. Большинство работ использует классическое условие самосогласования, которое справедливо, если время образования конденсата пар мало по сравнению с другими характерными временами в рассматриваемых задачах. Следует отметить, что рассмотрение уравнения для вершинной части (см., например, [5]), показывающее неустойчивость основного состояния электронов при наличии слабого притяжения, не дает непосредственно ответа для характерного времени кинетики перехода в сверхпроводящее состояние. В ряде работ рассматриваются кинетические свойства сверхпроводников в так называемом бесстолкновительном режиме, используется редуцированный Гамильтониан теории БКШ, полностью пренебрегается обычными электрон-электронными столкновениями. Такая задача рассматривалась в работе [6]. Недавно появилась работа [7], а в работах [8] дана исчерпывающая классификация свойств редуцированного гамильтониана, принадлежащего некоторому классу точно решаемых моделей. Однако следует иметь в виду, что сверхпроводящее спаривание, связанное со слабым притяжением между электронами вбли-

зи ферми-поверхности, является малым эффектом на фоне более сильного взаимодействия в ферми-жидкости, которой являются электроны металла, и полное игнорирование столкновений может привести к нефизическим артефактам. В настоящей заметке мы используем другой подход, предполагая, что столкновения возбуждений происходит достаточно часто, вызывая их термализацию, в то время как изменение параметра порядка (волновой функции конденсата) происходят достаточно медленно. Обсуждение справедливости такого предположения требует сравнения получающихся времен релаксации.

Можно формально ввести некоторый малый параметр при процессах релаксации параметра порядка и провести вычисления в первом порядке теории возмущений по этому параметру. Эта задача, однако, даже в такой постановке остается достаточно сложной. Мы рассмотрим только простейший случай, считая, что имеется однородный неравновесный параметр порядка, принимающий некоторое малое значение в начальный момент времени, и рассмотрим его однородную эволюцию в некотором макроскопически большом объеме.

Преобразование Боголюбова тесно связано с уравнениями среднего поля для операторов вторичного квантования в модели БКШ:

$$H = \sum (p^2/2m - \mu) a_{\mathbf{p},\sigma}^+ a_{\mathbf{p},\sigma} - \frac{\lambda}{V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}\uparrow}^+ a_{-\mathbf{p}\downarrow}^+ a_{-\mathbf{p}'\downarrow} a_{\mathbf{p}'\uparrow}, \quad (1)$$

где V объем сверхпроводника.

Как показано Боголюбовым [2], приближение среднего поля дает точное основное состояние в предположении большого числа электронов. При конечных температурах теория среднего поля [9] является некоторым обобщением метода Боголюбова для нулевой температуры, причем в преобразованном

гамильтониане играют роль только диагональные по новым ферми-операторам члены, остальными можно пренебречь. Условие самосогласования состоит в требовании минимальности энергии при фиксированных числах заполнения для возбуждений, то есть при постоянной энтропии. Условие самосогласования не может быть выполнено в процессе роста числа пар. Преобразованный гамильтониан будет иметь вид (см., например, [9])

$$H = 2 \sum_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}} (U_{\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{p}}^2) (\hat{n}_{\mathbf{p}\uparrow} + \hat{n}_{\mathbf{p}\downarrow}) - \frac{\lambda}{V} \left(\sum_{\mathbf{p}} U_{\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}} (1 - \hat{n}_{\mathbf{p}\uparrow} - \hat{n}_{\mathbf{p}\downarrow}) \right)^2, \quad (2)$$

где $\xi_{\mathbf{p}} = p^2/2m - \epsilon_f$, $U_{\mathbf{p}}^2 = (1 + \xi_{\mathbf{p}}/\epsilon_p)/2$, $V_{\mathbf{p}}^2 = (1 - \xi_{\mathbf{p}}/\epsilon_p)/2$. Здесь $\epsilon_p = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}$ – энергия возбуждений.

В равновесии H достигает минимума как функция Δ при фиксированных числах заполнения $n_{p,\sigma}$, что можно интерпретировать как равный нулю химический потенциал пар $\mu_s = 2(\partial H/\partial N_s) = 0$, где число электронов в парах $N_s = 2V|\Psi|^2$, Ψ – волновая функция конденсата. При температуре, близкой к температуре перехода, $\Psi \sim \Delta\sqrt{n/T_c^2}$ (n – плотность электронов, T_c – температура сверхпроводящего перехода). Варьируя по Ψ , мы должны получить уравнения Гамильтона:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= 2 \left(\frac{\partial H}{\partial N_s} \right)_{n_{p,\sigma}}, \quad \Psi = \mu_s(|\Delta|, n_{p,\sigma}) \Psi, \\ -i\hbar \frac{\partial \Psi^+}{\partial t} &= 2 \left(\frac{\partial H}{\partial N_s} \right)_{n_{p,\sigma}}, \quad \Psi^+ = \mu_s(|\Delta|, n_{p,\sigma}) \Psi^+, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mu_s = 2 \left(\frac{\partial H}{\partial N_s} \right)_{n_{p,\sigma}}, \quad (4)$$

которые можно понимать как усредненные уравнения движения для операторов рождения пар Ψ, Ψ^+ . Таким образом, волновая функция пар имеет вид $\Psi = |\Psi|e^{-i\mu_s t/\hbar}$. Это обстоятельство играет важную роль в процессе релаксации и должно учитываться самосогласованным образом также в самом преобразовании Боголюбова.

Уравнения Боголюбова для операторов вторично-го квантования будут иметь вид

$$\begin{aligned} i\hbar \partial a_{\mathbf{p},\sigma} / \partial t &= (\epsilon_0(p) - \mu) a_{\mathbf{p},\sigma} + |\Delta| e^{-i\mu_s t/\hbar} a_{-\mathbf{p},-\sigma}^+, \\ -i\hbar \partial a_{\mathbf{p},\sigma}^+ / \partial t &= (\epsilon_0(p) - \mu) a_{\mathbf{p},\sigma}^+ - |\Delta| e^{i\mu_s t/\hbar} a_{\mathbf{p},\sigma}. \end{aligned} \quad (5)$$

Решения этих уравнений можно легко получить путем подстановки $a_{\mathbf{p},\sigma} = e^{-i\mu_s t/2\hbar} \tilde{a}_{\mathbf{p},\sigma}$, $a_{-\mathbf{p},-\sigma}^+ = e^{i\mu_s t/2\hbar} \tilde{a}_{-\mathbf{p},-\sigma}^+$, изгоняющей явную зависимость от

времени из операторных уравнений (5). Уравнения для величин $\tilde{a}_{\mathbf{p},\sigma}, \tilde{a}_{-\mathbf{p},-\sigma}^+$ имеют стандартный вид, а энергия возбуждений соответствует измененному химическому потенциалу:

$$E(p) = \sqrt{\tilde{\xi}_{\mathbf{p}}^2 + |\Delta|^2}, \quad \tilde{\xi}_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2m} - \mu - \frac{\mu_s}{2}. \quad (6)$$

Имеются две линейно независимые собственные функции системы (5), пропорциональные $e^{\pm iE(p)t/\hbar}$, по которым могут быть разложены операторы $\tilde{a}_{\mathbf{p},\sigma}, \tilde{a}_{-\mathbf{p},-\sigma}^+$, что приводит к возможности введения новых фермиевских операторов рождения и уничтожения возбуждений $\gamma_{-\mathbf{p},-\sigma}^+, \gamma_{\mathbf{p},\sigma}$:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{\mathbf{p},\sigma} &= U_{\mathbf{p}}^+ \gamma_{\mathbf{p},\sigma} + U_{\mathbf{p}}^- \gamma_{-\mathbf{p},-\sigma}^+, \\ \tilde{a}_{-\mathbf{p},-\sigma}^+ &= V_{\mathbf{p}}^+ \gamma_{\mathbf{p},\sigma} + V_{\mathbf{p}}^- \gamma_{-\mathbf{p},-\sigma}^+, \end{aligned} \quad (7)$$

где пара $U_{\mathbf{p}}^+, V_{\mathbf{p}}^+$ соответствует решению с положительной энергией, $U_{\mathbf{p}}^-, V_{\mathbf{p}}^-$ – решению с отрицательной энергией. При этом $U_{\mathbf{p}}^- = V_{\mathbf{p}}^+$, $U_{\mathbf{p}}^+ = -V_{\mathbf{p}}^-$ и выполняется условие ортогональности

$$U_{\mathbf{p}}^+ U_{\mathbf{p}}^- + V_{\mathbf{p}}^+ V_{\mathbf{p}}^- = 0,$$

так как энергии разные. Легко видеть, что гамильтониан БКШ (1) выражается через $\tilde{a}_{\mathbf{p},\sigma}, \tilde{a}_{-\mathbf{p},-\sigma}^+$ или $\gamma_{-\mathbf{p},-\sigma}^+, \gamma_{\mathbf{p},\sigma}$ стандартным образом и имеет вид (2):

$$H = H(|\Delta|, \hat{n}_{\mathbf{p}}),$$

если мы оставим только диагональные члены.

Химический потенциал пар $\mu_s(|\Delta|, T)$ является максимальным по модулю при $|\Delta| = 0$ и стремится к нулю при $|\Delta| \rightarrow |\Delta_{eq}|$. Согласно теории БКШ (см. [9, 10]), вблизи критической температуры

$$|\mu_s(\Delta, T)|_{\Delta=0} \approx |T - T_c| \frac{6\pi^2 T_c}{7\zeta(3) \epsilon_f} \quad (8)$$

(где $\zeta(3)$ – дзета-функция Римана) и является малой величиной по сравнению с равновесным значением щели $\Delta_{eq}(T)$ при фактически любых температурах.

Если нет процессов, приводящих к изменению $|\Delta|$, то мы имеем стационарный газ фермиевских возбуждений с энергией (6) и химическим потенциалом пар $\mu_s = 2\partial H/\partial N_s$. Газ возбуждений приближенно должен находиться в тепловом равновесии, соответствующем максимуму энтропии, если время релаксации $|\Delta|$ много больше времени соударений между возбуждениями. Если же достигнуто равновесное $|\Delta|$, то $\mu_s = 0$, что соответствует классическому условию самосогласования $\partial H/\partial |\Delta| = 0$ (см., например, [10]).

Числа заполнения $n_{\mathbf{p}}$ удовлетворяют кинетическому уравнению Больцмана для возбуждений

в сверхпроводнике. Главный член в интеграле столкновений соответствует парным столкновениям фермиевских возбуждений, сохраняющим их число и устанавливающим тепловое равновесие. Кроме этого, имеются тройные столкновения и электрон-фононные столкновения. В случае, близком к равновесию с $|\Delta|$, удовлетворяющей условию самогласования, кинетические уравнения получены в ряде работ. Мы следуем результатам работы [11]. Ситуация с изменением $|\Delta|$ рассматривалась в связи с нарушением электронно-дырочной симметрии (charge imbalance) [12]. В нашей задаче имеется близкая ситуация, однако в энергетическом балансе столкновений необходимо учитывать энергию, возникающую при изменении числа пар из-за конечной величины μ_s .

Кинетическое уравнение для $n_{p,\sigma}$ имеет вид

$$\partial n_{p,\sigma}/\partial t = J_{e-e}(\mathbf{p}) - J_{e-ph}(\mathbf{p}) + J_{imp}(\mathbf{p}). \quad (9)$$

Мы не будем выписывать интеграл столкновений квазичастиц между собой. Отметим, что парные столкновения сохраняют энергию сталкивающихся возбуждений и поэтому не могут привести к образованию связанных куперовских пар. Такой процесс может идти только за счет маловероятных при $T \lesssim T_c$ тройных столкновений, когда выделившаяся энергия будет унесена оставшимся возбуждением. Основной процесс изменения $|\Delta|^2$ связан с электрон-фононным взаимодействием. Роль обыкновенных немагнитных примесей J_{imp} незначительна, и мы будем рассматривать только “чистые” сверхпроводники с большой длиной свободного пробега. Электрон-фононный интеграл столкновений может быть разбит на часть, сохраняющую число возбуждений J_{e-ph}^s , и часть, отвечающую за рекомбинацию и распад пар J_{e-ph}^r . Гамильтониан электрон-фононного взаимодействия в металле имеет вид [5]

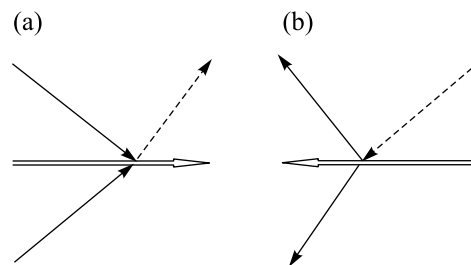
$$H_{e-ph} = g \int \hat{\Psi}_\sigma^+(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_\sigma(\mathbf{r}) \text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (10)$$

где $\Psi_\sigma, \Psi_\sigma^+$ – операторы вторичного квантования для электронов, \mathbf{u} – смещение решетки. Этот гамильтониан выражается стандартным образом через операторы $\tilde{a}_{-p,-\sigma}^+, \tilde{a}_{p,\sigma}$, поэтому он выражается также стандартным образом через боголюбовские операторы $\gamma_{p,\sigma}, \gamma_{-p,-\sigma}^+$. Для нас интересны процессы с изменением числа квазичастиц, так как именно они приводят к изменению числа пар. Оператор числа электронов в боголюбовском приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \sum_{k,\sigma} a_{k,\sigma}^+ a_{k,\sigma} = \sum_{k,\sigma} \tilde{a}_{k,\sigma}^+ \tilde{a}_{k,\sigma} = \\ &= \sum_{k,\sigma} (U_k^2 - V_k^2) \hat{n}_{k,\sigma} + 2 \sum_k V_k^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда видно, что число электронов в парах определяется выражением $2 \sum V_k^2$. В силу электронейтральности полный заряд электронов проводимости равен заряду ионов решетки, и полная плотность электронов задана. Поэтому изменение заряда пар привязано к изменению заряда возбуждений. В частности, исчезновение двух возбуждений $\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{q} - \mathbf{p}, -\sigma$ должно приводить к образованию $U_p^2 - V_p^2 + U_{q-p}^2 - V_{q-p}^2 = \delta N_s$ электронов в парах и, соответственно, к изменению энергии пар $\delta E_n = \mu_s \delta N_s / 2$. Это изменение энергии пар необходимо учитывать в законе сохранения энергии при соответствующих переходах в интеграле столкновений J_{e-ph}^r . Знак $U_p^2 - V_p^2$ может быть различным, и классификация переходов идет по эффективности образования пар.

Наиболее эффективны процессы с уничтожением двух возбуждений. Изобразим различные процессы посредством диаграмм (см. рисунок), где сплошные



(а) Диаграмма аннигиляции двух возбуждений с излучением фона. (б) Диаграмма обратного процесса, когда фон распадается на два возбуждения. Сплошные тонкие линии соответствуют возбуждениям, двойные линии соответствуют конденсату пар, пунктирная линия соответствует фону

ми линиями обозначены уничтожение и рождение возбуждений, пунктирными – то же для фона и двойная линия означает линию конденсата пар. Мы ограничимся случаем, когда параметр порядка $|\Delta|^2$ меньше равновесного и $\mu_s < 0$. Случай, когда параметр порядка выше равновесного и $\mu_s > 0$, рассматривается аналогично. Следует различать случаи квазичастиц вне ферми-сферы, $\xi_p > 0$ ($p > p_f$), и внутри, $\xi_p < 0$ ($p < p_f$). Уничтожение двух частиц вне ферми-сферы соответствует росту числа пар и изменению энергии пар $\tilde{\epsilon} = \mu_s (\xi_p / \epsilon_p + \xi_{q-p} / \epsilon_{q-p}) / 2 < 0$. Уничтожение двух квазичастиц внутри ферми-сферы соответствует уменьшению числа пар. Изменение

энергии пар $\tilde{\epsilon}$ в таком случае имеет противоположный знак.

Согласно работе [11], рекомбинационный интеграл столкновений имеет вид

$$I_{e-ph}^r = -\frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^3} |\gamma(\mathbf{q})|^2 (U_{p-q}V_p + U_pV_{p-q})^2 \times \\ \times [n_p n_{-p+q} (1 + N_q) \delta(\epsilon_p + \epsilon_{q-p} - cq - \tilde{\epsilon}) - \\ - (1 - n_p)(1 - n_{q-p}) N_q \delta(cq - \epsilon_p - \epsilon_{q-p} + \tilde{\epsilon})], \quad (12)$$

где c – скорость звука в металле, электрон-фононная вершина (см., например, [5])

$$\gamma^2(\mathbf{q}) = \hbar^3 (cq) 2\pi\eta / mp_f, \quad (13)$$

m – масса электрона, η – постоянная порядка единицы. Следует учесть, что одно рекомбинационное столкновение уничтожает сразу два возбуждения с \mathbf{p} , σ и $\mathbf{q} - \mathbf{p}$, $-\sigma$. Поэтому, дифференцируя соотношение (11), выражающее закон сохранения числа электронов, получим

$$\frac{\partial N_s}{\partial t} = - \sum (U_p^2 - V_p^2) \frac{\partial n_{p,\sigma}}{\partial t} = \\ = -V \int J_{eph}^r(p, q) (U_p^2 - V_p^2 + U_{q-p}^2 - V_{q-p}^2) \times \\ \times \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (14)$$

где $J_{eph}^r(p, q)$ – парциальный интеграл столкновений с излучением (поглощением) фонона с импульсом q . Мы не дифференцируем по времени множитель $(U_p^2 - V_p^2)$, зависящий от $|\Delta|$ так как считаем n_p четной равновесной функцией относительно электронов и дырок. По этой же причине в (14) опущен член с производной $\frac{\partial n_p}{\partial |\Delta|^2} \frac{\partial |\Delta|^2}{\partial t}$.

Можно показать, что вклад процесса уничтожения двух квазичастиц вне ферми-сферы и обратного к нему процесса дают в правой части уравнения (14) для тепловых функций распределения электронов n_p и фононов N_q

$$\frac{2\pi}{\hbar} V \int_{p, |\mathbf{q}-\mathbf{p}| > p_f} \left(\frac{\xi_{\mathbf{p}}}{\epsilon_{\mathbf{p}}} + \frac{\xi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}}{\epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}} \right) \times \\ \times |\gamma(\mathbf{q})|^2 (U_{\mathbf{p}}V_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + V_{\mathbf{p}}U_{\mathbf{q}-\mathbf{p}})^2 \times \\ \times (1 - n(\mathbf{p}))(1 - n(\mathbf{q} - \mathbf{p})) N(\mathbf{q}) \left(e^{-\epsilon_1/T} - 1 \right) \times \\ \times \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} + \epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} - cq - \epsilon_1(p, q)) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (15)$$

где $\epsilon_1 = \frac{1}{2}\mu_s (\xi_{\mathbf{p}}/\epsilon_{\mathbf{p}} + \xi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}/\epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}) < 0$.

Аналогично, вклад процесса уничтожения двух квазичастиц внутри ферми-сферы и процесса обратного к нему дают

$$\frac{2\pi}{\hbar} V \int_{p, |\mathbf{q}-\mathbf{p}| < p_f} \left(\frac{\xi_{\mathbf{p}}}{\epsilon_{\mathbf{p}}} + \frac{\xi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}}{\epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}} \right) \times \\ \times |\gamma(\mathbf{q})|^2 (U_{\mathbf{p}}V_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + V_{\mathbf{p}}U_{\mathbf{q}-\mathbf{p}})^2 \times \\ \times (1 - n(\mathbf{p}))(1 - n(\mathbf{q} - \mathbf{p})) N(\mathbf{q}) \left(e^{-\epsilon_2/T} - 1 \right) \times \\ \times \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} + \epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} - cq - \epsilon_2(p, q)) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (16)$$

где $\epsilon_2 = \frac{1}{2}\mu_s (\xi_{\mathbf{p}}/\epsilon_{\mathbf{p}} + \xi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}/\epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}) > 0$. Из-за малой величины $|\mu_s| \ll T$ можно учесть $\epsilon_1(p, q)$, $\epsilon_2(p, q)$ только в первом порядке и воспользоваться электрон-дырочной симметрией для равновесных функций распределения, что приводит к одинаковому вкладу обоих процессов. Уравнение (14) превращается в уравнение для $|\Delta|$, если воспользоваться связью

$$n_s = \frac{n_e}{T_c^2} |\Delta|^2 \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}$$

между плотностью сверхпроводящих электронов n_s и $|\Delta|$:

$$\frac{\partial |\Delta|^2}{\partial t} = \frac{4\pi T_c^2}{\hbar n_e} \times \\ \times \int_{p, |\mathbf{q}-\mathbf{p}| > p_f} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{\xi_{\mathbf{p}}}{\epsilon_{\mathbf{p}}} + \frac{\xi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}}{\epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}} \right) |\gamma(\mathbf{q})|^2 \times \\ \times (U_{\mathbf{p}}V_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + V_{\mathbf{p}}U_{\mathbf{q}-\mathbf{p}})^2 (1 - n_{\mathbf{p}})(1 - n_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}) \times \\ \times N_{\mathbf{q}} \left(\frac{-\epsilon_1}{T} \right) \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} + \epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} - cq - \epsilon_1(p, q)). \quad (17)$$

В правой части уравнения (17) можно воспользоваться тождеством

$$\left(\frac{\xi_{\mathbf{p}}}{\epsilon_{\mathbf{p}}} + \frac{\xi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}}{\epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}} \right) (U_{\mathbf{p}}V_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + U_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}V_{\mathbf{p}})^2 \equiv \\ \equiv \frac{|\Delta|^2 (\xi_{\mathbf{p}} + \xi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}) (\epsilon_{\mathbf{p}} + \epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{p}})}{(\epsilon_{\mathbf{p}}\epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{p}})^2}.$$

При интегрировании по \mathbf{p} перейдем к интегрированию по $\xi = \xi_p = v_f(p - p_f)$. При интегрировании по \mathbf{p} , \mathbf{q} возникает интеграл по $\cos \theta$, где θ – угол между \mathbf{p} и \mathbf{q} . Удобно поэтому перейти к переменным ξ , q , $\xi' = \xi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \approx \xi_p - v_f q \cos \theta$. Якобиан перехода при этом равен $1/v_f q$, и уравнение (17) принимает, с учетом выражения для электрон-фононной вершины (13) и взятия интеграла по q , вид

$$\frac{\partial |\Delta|^2}{\partial t} = \\ = \frac{8\pi T_c^2 \eta}{\hbar n_e} |\Delta|^2 \int \frac{(\xi + \xi')(\epsilon + \epsilon')^3}{(\epsilon\epsilon')^2 c^2 v_f (2\pi)^4} \left(\frac{\xi}{\epsilon} + \frac{\xi'}{\epsilon'} \right) \times \\ \times (1 - n_{\epsilon})(1 - n_{\epsilon'}) N(\epsilon + \epsilon') \frac{(-\mu_s)}{T} \frac{d\xi d\xi'}{\hbar^3}; \quad (18)$$

мы видим, что при конечных $\mu_s < 0$ параметр порядка растет. При $\mu_s > 0$ он будет падать.

Подынтегральное выражение симметрично по ξ и ξ' . Если $\Delta \sim T$, то интеграл определяется масштабом $\xi, \xi' \sim T$, $q \sim T/c$. Учитывая выражение (13) для электрон-фононной вершины и выражение (8) для μ_s , можно получить буквенную оценку для времени релаксации квадрата модуля параметра порядка:

$$\frac{\partial |\Delta|^2}{\partial t} \sim \frac{|\Delta|^2}{\tau_r}, \quad \frac{1}{\tau_r} \sim \frac{T^2}{\epsilon_f} \left(\frac{T_c}{\epsilon_D} \right)^2 \frac{|\mu_s|}{T} \frac{1}{\hbar},$$

где ϵ_D – дебаевская энергия в сверхпроводнике. Мы видим, что время релаксации велико по сравнению со временем между упругими соударениями возбуждений $\tau_{ee} \approx \hbar \epsilon_f / T^2$.

На начальной стадии релаксации, при $|\Delta| \ll T_c$, ситуация несколько меняется из-за возникновения малых знаменателей, когда одно из аннигилирующих возбуждений имеет малую энергию, в то время как другое имеет энергию порядка температуры. Это связано с тем, что структура множителя $(\xi + \xi')(\epsilon + \epsilon')^3 / \epsilon^2 \epsilon'^2$ в подынтегральном выражении такова, что в знаменателе может быть самое большее вторая степень либо ϵ , либо ϵ' , дающая расходимость в пределе $\Delta \rightarrow 0$, интегрирование по другой переменной носит регулярный характер, и здесь существенны только тепловые энергии. Интегрирование особого интеграла дает член, пропорциональный $1/|\Delta|$. Регулярный интеграл дает величину, пропорциональную T^3 . Уравнение (18) в результате приобретает вид

$$\frac{\partial |\Delta|}{\partial t} = \frac{T T^2 T_c^2 T_c - T}{\hbar \epsilon_f \epsilon_D^2 \epsilon_f} = \frac{T}{\tau_r} \quad (19)$$

с правой частью, не зависящей от Δ (числовые константы опущены). Мы видим, что скорость релаксации остается медленной, хотя величина $|\Delta|$ растет линейно со временем. Постепенно этот процесс замедляется из-за уменьшения величины $|\mu_s|$ с ростом $|\Delta|$. Полученное уравнение релаксации (18) должно быть дополнено уравнением для изменения электронной температуры с учетом тепла, выделяющегося при релаксации неравновесного состояния, то есть энергии излучаемого фонона.

Полученное уравнение для релаксации параметра порядка сильно отличается от обобщенного уравнения [13, 4] TDGL. По-видимому, отличие связано с постановкой задачи. В нашем случае единственной причиной релаксации является неравновесное значение параметра порядка. Все отличия в функции распределения возбуждений от равновесной связаны

только с самим процессом релаксации. Однако, ввиду большой величины времени релаксации по сравнению с временем между соударениями, мы считаем функцию распределения равновесной с текущим значением $|\Delta|$. Возможные поправки в полученное уравнение для $|\Delta|$ будут содержать дополнительную малость τ_{ee}/τ_r .

Рассмотренная нами картина предполагает отсутствие других механизмов релаксации, кроме неупругого процесса излучения фонона при аннигиляции электронных возбуждений в куперовские пары, и ограничена случаем однородной релаксации. Последнее весьма существенно, так как процесс аннигиляции, где бы он не происходил, приводит к увеличению модуля параметра порядка во всем пространстве, занятом сверхпроводником, что соответствует квантово-механическому понятию рассеяния в однородное состояние. Следует отметить чрезвычайно малую величину вычисленной скорости однородной релаксации параметра порядка. Рассмотрение неоднородной в пространстве релаксации требует существенного изменения подхода к описанию процесса рассеяния.

Авторы выражают благодарность Г.М. Элиашбергу за глубокое и плодотворное обсуждение различных этапов настоящей работы. Мы благодарны Н.Б. Копнину за полезные замечания.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Квантовая макрофизика” и поддержана грантом Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” и грантом Российского фонда фундаментальных исследований # 05-02-16553.

Один из авторов (Р.Б.С.) также выражает благодарность некоммерческому фонду “Династия” и Landau Scholarship Committee, FZ-Juelich за финансовую поддержку.

1. J. Bardin, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **106**, 162 (1957).
2. Н. Н. Боголюбов, *ЖЭТФ* **34**, 58 (1958).
3. *Nonequilibrium Superconductivity*, Eds. D. N. Langenberg and A. I. Larkin, North-Holland, 1986.
4. N. Kopnin, *Theory of Nonequilibrium Superconductivity*, Clarendon-Press, Oxford, 2001.
5. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, М.: Физматгиз, 1962.
6. А. Ф. Волков, Ш. М. Коган, *ЖЭТФ* **65**, 2039 (1973).
7. R. A. Barankov, L. S. Levitov, and B. Z. Spivak, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 160401 (2004).
8. E. A. Yuzbashyan, B. L. Altshuler, V. B. Kuznetsov, and V. Z. Enolskii, *cond-mat/0407501* (2004); *cond-mat/0505493* (2005).

9. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, УФН **65**, 551 (1958).
10. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. **2**, М.: Наука, 1978.
11. А. Г. Ароню, Yu. M. Galperin, V. L. Gurevich, and V. I. Kozub, *Nonequilibrium Superconductivity*, Eds. D. N. Langenberg, and A. I. Larkin, North-Holland, 1986.
12. M. Tinkham and J. Clarke, Phys. Rev. Lett. **28**, 1366 (1972).
13. R. J. Watts-Tobin, Y. Kraehenbuehl, and L. Kramer, J. Low Temp. Phys. **42**, 459 (1981).