

Новый класс предельно коротких электромагнитных солитонов

С. В. Сазонов¹⁾, Н. В. Устинов

Томский государственный университет, 634050 Томск, Россия

Поступила в редакцию 20 апреля 2006 г.

Представлена физическая реализация интегрируемого модифицированного уравнения синус-Гордона, которое здесь описывает распространение векторного предельно короткого электромагнитного импульса в системе несимметричных квантовых объектов, обладающих в собственнoэнергетических состояниях постоянными дипольными моментами. На основе солитонных решений для обыкновенной и необыкновенной компонент выявлены новые режимы динамики импульса и среды, специфичные только для несимметричных сред.

PACS: 42.50.Hz, 42.65.Tg

В последнее время значительно возрос интерес к исследованию нелинейной динамики оптических импульсов длительностью до одного периода световых колебаний (предельно коротких импульсов, ПКИ) в средах, состоящих из несимметричных квантовых объектов (НКО) типа квантовых ям, квантовых нитей и т.д. Эти объекты характеризуются отличными от нуля постоянными дипольными моментами (ПДМ) в собственнoэнергетических состояниях. В таких условиях оптический импульс не только вызывает квантовые переходы между этими состояниями, но и динамическим образом сдвигает частоту данных переходов за счет эффекта Штарка.

С одной стороны, отмеченный интерес обусловлен бурным развитием нанотехнологий [1], позволяющих, в частности, создавать среды с наперед заданными свойствами. С другой стороны, мощный толчок данные исследования получили благодаря успешной генерации в лабораторных условиях лазерных ПКИ [2–4]. Оба эти фактора стимулировали выход теоретических работ по взаимодействию ПКИ с несимметричными средами, в которых был совершен отказ от стандартного в оптике квазимонохроматических импульсов приближения медленно меняющихся амплитуд и фаз (ММАФ) [5–13]. Одним из результатов явилось получение новых нелинейных систем уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [14], изучение которых позволило выявить особенности распространения ПКИ в средах, содержащих НКО. Вместо ММАФ было использовано приближение малой плотности НКО, что позволило редуцировать волновые уравнения до первого порядка относительно производных и свести, таким образом, исходные системы к интегрируемым

моделям. При учете векторного характера светового импульса (его обыкновенной и необыкновенной компонент) для сведения исходной нелинейной системы к интегрируемым моделям приходится накладывать дополнительные условия на ПДМ квантовых состояний [10, 11]. Отметим, что данные условия, как и приближение малой плотности НКО, являются весьма искусственными и мало достижимыми в реальных условиях.

В связи со сказанным выше приобретает актуальность изучение распространения векторных ПКИ в системе НКО без наложения дополнительных ограничений и условий связи на ПДМ квантовых переходов и плотность среды, чему и посвящена настоящая работа.

Пусть матрица, содержащая НКО, является изотропной средой и характеризуется показателем преломления n . НКО будем считать аксиально симметричными с осью симметрии (оптической осью) z декартовой системы координат. Предположим, что асимметрия НКО обусловлена их внутренним электрическим полем. Тогда энергетические уровни НКО вырождены по модулю проекции M электронного углового момента на ось z . Будем считать, что основному состоянию соответствует $M = 0$, а возбужденному – $M = \pm 1$ (рис.1). При этом остальные квантовые уровни достаточно удалены от рассматриваемых, разделенных частотой ω_0 . Поэтому их влиянием можно пренебречь. Последнее предположение хорошо оправдывается для НКО, образованных туннельными переходами в полупроводниковых гетероструктурах. В этом случае для низших квантовых уровней $\omega_0 \sim 10^{13} \text{ с}^{-1}$, а частоты ω' перехода на вышележащие уровни могут достигать значений порядка 10^{15} с^{-1} [1]. При длительности импульса $\tau_p \sim 10 \text{ фс}$ имеем условие

¹⁾e-mail: barab@newmail.ru

$$\varepsilon \equiv (\omega_0 \tau_p)^2 \ll 1, \quad (1)$$

впервые предложенное в [15, 16] при решении задачи о распространении ПКИ в изотропных средах. Заметим, что при этом $(\omega' \tau_p)^2 \gg 1$. Поэтому переходами электронов в область непрерывного спектра можно с хорошей точностью пренебречь.

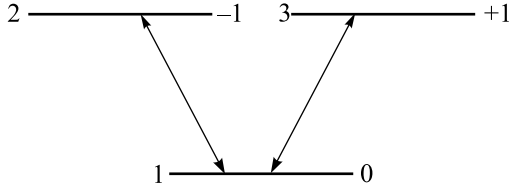


Рис.1. Схема квантовых переходов. Слева от уровней указаны их порядковые номера, справа – значение проекции M электронного углового момента на ось z

Смысл условия (1) состоит в том, что спектр ПКИ значительно шире, нежели частота квантового перехода, вовлеченного во взаимодействие с импульсом (приближение спектрального перекрытия). По этой причине ПКИ, удовлетворяющие (1), можно назвать широкополосными.

Пусть импульс распространяется вдоль оси x , перпендикулярной оптической оси. В этих условиях электрическое поле E_o обыкновенной компоненты импульса возбуждает квантовый переход, а необыкновенная E_e динамически смещает частоту данного перехода. При этом уравнения для элементов $\rho_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) матрицы плотности $\hat{\rho}$ можно представить следующим образом [10, 11]:

$$\frac{\partial \rho_{\mu\nu}}{\partial t} = -i \left(\omega_{\mu\nu} - \frac{D_{\mu\mu} - D_{\nu\nu}}{\hbar} E_e \right) \rho_{\mu\nu} + i \left[\hat{\Omega}, \hat{\rho} \right]_{\mu\nu}, \quad (2)$$

где $\omega_{21} = \omega_{31} = -\omega_{12} = -\omega_{13} = \omega_0$, $\omega_{23} = \omega_{32} = 0$, $D_{\mu\mu}$ – диагональные матричные элементы оператора дипольного момента, \hbar – постоянная Планка, $[\cdot, \cdot]_{\mu\nu}$ – матричный элемент коммутатора, $\hat{\Omega} = \hat{d}E_o/\hbar$, в матрице \hat{d} дипольных моментов переходов отличны от нуля только элементы $d_{21} = d_{12}$ и $d_{31} = d_{13}$.

В свою очередь импульсные компоненты подчиняются уравнениям вида [10, 11]

$$\frac{\partial^2 E_o}{\partial x^2} - \left(\frac{n}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 E_o}{\partial t^2} = \frac{4\pi N}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{\mu=2}^3 d_{\mu 1} (\rho_{\mu 1} + \rho_{\mu 1}^*), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 E_e}{\partial x^2} - \left(\frac{n}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 E_e}{\partial t^2} = \frac{4\pi N}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{\mu=1}^3 D_{\mu\mu} \rho_{\mu\mu}, \quad (4)$$

где N – концентрация НКО, c – скорость света в вакууме.

Исключим из системы (2)–(4) материальные переменные, используя (1) и следуя [17]. Считая, что величины ω_0 и $(D_{\mu\mu} - D_{\nu\nu})E_e/\hbar$ одного порядка (см. ниже), в нулевом приближении по ε пренебрежем выражением в круглых скобках правой части (2). Тогда, учитывая, что матрица $\hat{\Omega}$ коммутирует сама с собой в различные моменты времени, запишем

$$\hat{\rho} = \exp[i\hat{\psi}/2] \hat{\rho}(-\infty) \exp[-i\hat{\psi}/2]. \quad (5)$$

Здесь $\hat{\psi} = 2 \int_{-\infty}^t \hat{\Omega} dt'$, $\hat{\rho}(-\infty)$ – матрица плотности электрона до импульсного воздействия.

Принимая во внимание структуру матрицы $\hat{\Omega}$, легко видеть, что при любом натуральном k выполняются равенства $\hat{\psi}^{2k+1} = \hat{\psi}^{2k} \hat{\psi}$, $\hat{\psi}^{2(k+1)} = \hat{\psi}^{2k} \hat{\psi}^2$, где

$$\psi = 2(d/\hbar) \int_{-\infty}^t E_o dt', \quad d = \sqrt{d_{21}^2 + d_{31}^2}.$$

Подставляя эти соотношения в разложения для операторных экспонент, получим после их суммирования

$$\exp[\pm i\hat{\psi}/2] = \hat{I} \pm i \frac{\hat{d}}{d} \sin \frac{\psi}{2} - 2 \frac{\hat{d}^2}{d^2} \sin^2 \frac{\psi}{4}, \quad (6)$$

где \hat{I} – единичная матрица.

Пусть до импульсного воздействия уровни заселены согласно статистике Больцмана, то есть $\hat{\rho}(-\infty) = \text{diag}(W_2, W_2, W_1)$. Тогда использование (5), (6) и последующая подстановка получившихся выражений в правые части системы (2) приведет к выражениям для $\partial \rho_{\mu\nu} / \partial t$ в первом порядке по ε . После подстановки данных выражений в правые части (3) и (4) найдем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_o}{\partial x^2} - \left(\frac{n}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 E_o}{\partial t^2} = \\ & = \frac{4\pi dN}{c^2} (W_1 - W_2) \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\omega_0 + \frac{D}{\hbar} E_e \right) \sin \psi \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_e}{\partial x^2} - \left(\frac{n}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 E_e}{\partial t^2} = \\ & = -\frac{4\pi dN}{c^2} \frac{D}{\hbar} (W_1 - W_2) \frac{\partial}{\partial t} (E_o \sin \psi). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь мы ввели обозначение, определяющее эффективный ПДМ НКО:

$$D = \frac{d_{21}^2 (D_{11} - D_{22}) + d_{31}^2 (D_{11} - D_{33})}{d_{21}^2 + d_{31}^2}. \quad (9)$$

Выражения для населенностей квантовых уровней имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= W_1 - (W_1 - W_2) \sin^2 \frac{\psi}{2}, \\ \rho_{\mu\mu} &= W_2 + (W_1 - W_2) \frac{d_{\mu 1}^2}{d^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mu = 2, 3$.

Правые части (7) и (8) пропорциональны малому параметру $\sqrt{\varepsilon}$. Следовательно, оба слагаемых в левых частях данных уравнений незначительно отличаются друг от друга. Тогда из (7) находим $E_o \gg \gg 4\pi dN\sqrt{\varepsilon}$. В то же время $E_o \sim \hbar\psi/2d\tau_p \sim \hbar/d\tau_p$. Следовательно,

$$\eta\varepsilon \ll 1, \quad (11)$$

где $\eta = 4\pi d^2 N/\hbar\omega_0$.

Заметим, что последнее неравенство, вообще говоря, не предполагает выполнения условия малой плотности $\eta \ll 1$ [18]. Здесь достаточно только условия (1). Случай $\eta \gg 1$ заведомо исключен из рассмотрения, так как здесь не учитывается прямое диполь-дипольное взаимодействие между НКО.

Отталкиваясь от (11), выражающем собой малость правых частей (7) и (8), проведем в данных уравнениях редукцию относительно производных, следуя стандартной процедуре [7, 10, 18], что соответствует приближению однонаправленного распространения. В результате будем иметь

$$\frac{\partial E_o}{\partial x} = -\frac{2\pi dN}{cn}(W_1 - W_2) \left(\omega_0 + \frac{D}{\hbar} E_e \right) \sin \psi, \quad (12)$$

$$\frac{\partial E_e}{\partial x} = \frac{2\pi dN}{cn} \frac{D}{\hbar} (W_1 - W_2) E_o \sin \psi. \quad (13)$$

Теперь в верхнем пределе интеграла, определяющего ψ , следует произвести замену $t \rightarrow \tau \equiv t - nx/c$.

Система (12), (13) обладает интегралом движения

$$E_e^2 + 2\frac{\hbar\omega_0}{D} E_e + E_o^2 = f(\tau), \quad (14)$$

где $f(\tau)$ – функция, определяемая условиями на входе ПКИ в среду.

Отсюда, в частности, вытекает справедливость сделанного выше предположения о том, что величины ω_0 и DE_e/\hbar одного порядка.

Заметим, что аналогичный интеграл движения был найден в [19] при использовании приближения среды малой плотности, но без предположения (1).

Полагая без потери общности $f(\tau) = 0$ [19], выражая из (14) E_e через E_o при условии, что на бесконечности $E_e \rightarrow 0$ и $E_o \rightarrow 0$, а также учитывая, что $2dE_o/\hbar = \partial\psi/\partial\tau$, найдем из (12)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \tau} = -\beta \sqrt{1 - \tau_c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)^2 \sin \psi, \quad (15)$$

где $\beta = 4\pi d^2 N \omega_0 (W_1 - W_2) / \hbar c n$, $\tau_c = |D/2d\omega_0|$.

Уравнение (15) переходит при $\tau_c = 0$ в уравнение синус-Гордона (СГ) и известно как модифицированное уравнение СГ (МСГ). Оно, как и СГ, также интегрируемо с помощью МОЗР [20–22]. Подчеркнем, что при его получении мы не использовали предположение о малой плотности НКО. Кроме того, мы нигде не накладывали дополнительных ограничений на значения диагональных и недиагональных матричных элементов дипольных моментов, о чем свидетельствует общее выражение (9). Здесь нами было принято во внимание только условие (1). Применение этого условия при изучении распространения ПКИ в изотропных средах ($\tau_c = 0$) привело ранее к уравнению СГ [15, 16].

Следует особо отметить, что в настоящей работе уравнение МСГ (15) выведено на основе рассмотрения конкретной физической задачи. Ранее, в [20–22], оно возникло в ходе сугубо математического исследования свойств преобразований Бэклунда для уравнения СГ (см. также [23]).

Проанализируем ниже возможные процессы распространения ПКИ и соответствующую динамику НКО на основе односолитонного решения уравнения (15), которое можно записать в виде

$$\psi = \pm 2 \arccos \frac{q - \tanh \chi}{\sqrt{1 - 2q \tanh \chi + q^2}}, \quad (16)$$

где $q = \tau_c/\tau_p$, $\chi = (t - x/v)/\tau_p$, а скорость v распространения солитона связана с его длительностью соотношением

$$\frac{1}{v} = \frac{n}{c} + \beta \tau_p^2. \quad (17)$$

Соответственно для обыкновенной компоненты ПКИ получаем

$$E_o = \pm \frac{\hbar}{d\tau_p} \operatorname{sech} \chi \frac{1 - q \tanh \chi}{1 - 2q \tanh \chi + q^2}. \quad (18)$$

Для “площади” $A_o \equiv \psi_{\tau \rightarrow \infty}$ обыкновенной компоненты солитона имеем

$$A_o = \begin{cases} \pm 2\pi, & \tau_p > \tau_c \\ 0, & \tau_p < \tau_c \end{cases}. \quad (19)$$

Выражения (10), (14), (16)–(19) дают полное представление о динамике векторного ПКИ и населенностей квантовых уровней НКО.

Как видно из (19), односолитонные ПКИ в зависимости от их “площади” можно разбить на три семейства. Первые два семейства с $A_o = \pm 2\pi$ (однополярные 2π -импульсы) существуют также у уравнения СГ, описывающего динамику ПКИ в изотропных средах. Солитоны из семейства с $A_o = 0$, длительность которых меньше критического значения τ_c , являются двухполярными. В отличие от бризеров уравнения СГ, “площадь” которого также равна нулю (0π -импульсы), эти решения являются стационарными: их профиль в сопутствующей системе отсчета не претерпевает изменений. Взяв для структур типа GaAs/Al_{0.14}Ga_{0.86} с запирающими барьерами из Al_{0.3}Ga_{0.3}As $|D/d| \approx 0.2$ [24], $\omega_0 \sim 10^{13} \text{ c}^{-1}$ [1], найдем $\tau_c \sim 10$ фс. Полагая, кроме того, $D \sim 10^{-18}$ СГСЭ, $d \sim 5 \cdot 10^{-18}$ СГСЭ, $\tau_p \sim 10$ фс, найдем для интенсивностей обыкновенной, I_o , и необыкновенной, I_e , составляющих $I_{o,e} \approx cE_{o,e}^2/4\pi \sim 10^{10} - 10^{11} \text{ Вт/см}^2$, где мы считали $E_o \sim \hbar/d\tau_p$, $E_e \sim \hbar\omega_0/D$.

Заметим, что в средах НКО с высокой степенью асимметрии ($|D/d| \geq 1$), могут существовать только двухполярные импульсы, для которых $\tau_p < \tau_c$. Возможность же формирования однополярных импульсов вступает в противоречие с условием (1). Импульсы обоих типов возможны только в средах, где ПДМ мал по сравнению с дипольными моментами квантовых переходов.

Обыкновенная составляющая однополярного солитона при $\tau_p > \sqrt{2}\tau_c$ обладает одним центральным максимумом. При этом его распространение и сопутствующая динамика среды практически не отличаются от таковых в случае изотропной среды, где справедливо уравнение СГ: передняя часть импульса полностью инвертирует населенности уровней, а задняя возвращает данные населенности к исходному состоянию. Если же $\tau_c < \tau_p < \sqrt{2}\tau_c$, обыкновенная компонента солитона обладает двумя симметричными горбами с амплитудами $E_{om} = \hbar\omega_0/|D|$, первый из которых инвертирует населенности уровней НКО. Затем начинается рост необыкновенной составляющей, достигающей максимального по величине значения $2E_{om}$ в центре солитона. Данная составляющая сдвигает квантовые уровни НКО друг относительно друга так, что основной уровень становится возбужденным, и наоборот (рис.2). Таким образом, в промежутке между горбами среда эффективно находится в основных энергетических состояниях, которые в отсутствие солитона являются возбужденными и, со-

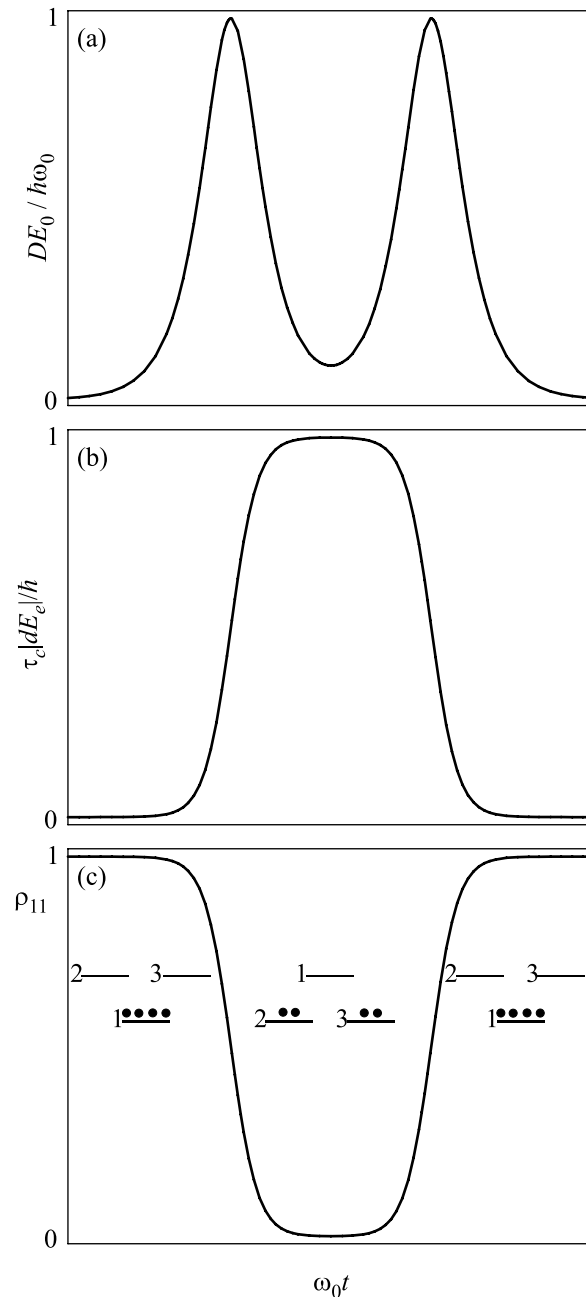


Рис.2. Временные зависимости обыкновенной (а), необыкновенной (b) компонент солитона и населенности основного уровня (с) при $\tau_c < \tau_p < \sqrt{2}\tau_c$. Координата y произвольна, $W_1 = 1$. Динамика квантовых уровней при прохождении солитона схематически изображена на рис.(с)

ответственно, неустойчивыми. С приближением второго горба обыкновенной компоненты необыкновенная составляющая убывает, возвращая взаимное положение квантовых уровней к исходному. В это же время второй горб обыкновенной компоненты переводит НКО в истинное основное состояние. Данный

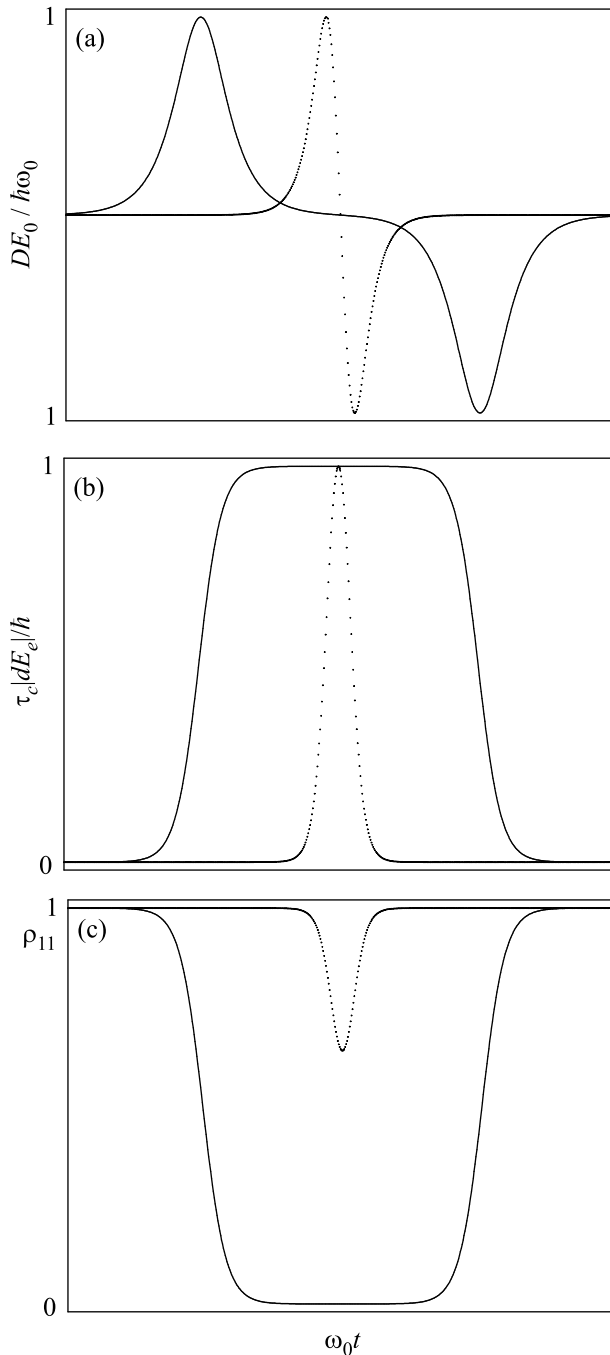


Рис.3. Временные зависимости обыкновенной (а), необыкновенной (б) компонент солитона и населенности основного уровня (с) при $\tau_p < \tau_c$ (случаю $\tau_p \ll \tau_c$ соответствуют точечные линии). Координата y произвольна, $W_1 = 1$

механизм распространения, присущий только среде из НКО, позволяет понять, что на интервал между горбами обыкновенной компоненты (а он становится сколь угодно большим при стремлении τ_p к τ_c) не накладывается ограничение, связанное с процес-

сами релаксации. Этот интервал может существенно превышать время энергетической релаксации. Здесь важно только, чтобы длительность горбов, определяемая величиной τ_p , была значительно меньше времен фазовой и энергетической релаксаций.

Аналогичен описанному выше и механизм распространения двухполярных солитонов ($\tau_p < \tau_c$), у которых интервал между горбами превосходит их длительность. При укорочении же длительности горбы двухполярного солитона сближаются, и уменьшается степень возбуждения НКО (рис.3).

В силу интегрируемости уравнения (15) столкновения между его солитонами (как одинаковых, так и различных форм и площадей) являются упругими. Особенности взаимодействия солитонов уравнения МСГ мы предполагаем обсудить в отдельной статье.

Проведенное в настоящей работе исследование показывает, что динамика широкополосных ПКИ в среде несимметричных квантовых объектов значительно разнообразнее, нежели соответствующая динамика в изотропных средах.

Благодарим Ю. В. Брежнева за плодотворные дискуссии. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 05-02-16422а).

1. В. Я. Демиховский, Г. А. Вугальтер, *Физика квантовых низкоразмерных структур*, М.: Логос, 2000.
2. D. H. Auston, K. P. Cheung, J. A. Valdmanis, and D. A. Kleinman, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1555 (1984).
3. К. Tamura and M. Nakazawa, *Opt. Lett.* **21**, 68 (1996).
4. С. А. Ахманов, В. А. Высолюх, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, М.: Наука, 1988.
5. L. W. Casperson, *Phys. Rev. A* **57**, 609 (1998).
6. A. Brown and W. J. Meath, *Phys. Rev. A* **63**, 013403 (2000).
7. M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. A. Glasgow, and J. V. Moloney, *Physica D* **138**, 134 (2000).
8. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **121**, 1012 (2002).
9. A. I. Maimistov and J.-G. Caputo, *Phys. Lett. A* **296**, 34 (2002).
10. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **124**, 803 (2003).
11. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ* **127**, 289 (2005).
12. С. О. Елютин, *ЖЭТФ* **128**, 17 (2005).
13. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *КЭ* **35**, 701 (2005).
14. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, М.: Наука, 1980.
15. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, *Письма в ЖЭТФ* **51**, 252 (1990).

16. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущиповский, *ЖЭТФ* **100**, 762 (1991).
17. S. V. Sazonov and E. V. Trifonov, *J. Phys. B: At., Mol. and Opt. Phys.* **27**, L7 (1994).
18. J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, *J. Phys. A: Math., Nucl. & Gen.* **6**, 1337 (1973).
19. А. А. Заболотский, *Письма в ЖЭТФ* **76**, 709 (2002).
20. M. D. Kruskal, *Lect. Appl. Math.* **15**, 61 (1974).
21. H.-H. Chen, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 925 (1974).
22. А. Б. Борисов, С. А. Зыков, *ТМФ* **116**, 199 (1998).
23. Р. Буллаф, Ф. Кодри, в кн. *Солитоны*, под ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри, пер. с англ. под ред. С. П. Новикова, М.: Мир, 1983, с. 28 [*Solitons*. Ed. by R. K. Bullough and P. J. Caudrey, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1980].
24. S. Koćinas, Z. Ikonić, and V. Milanović, *Optics Commun.* **140**, 89 (1997).