

Генерация баллистического транспорта частиц при воздействии слабого переменного возмущения на периодическую гамильтонову систему

Д. В. Макаров¹⁾, М. Ю. Улейский

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичёва Дальневосточного отд. РАН, 690041 Владивосток, Россия

Поступила в редакцию 19 апреля 2006 г.

Рассмотрена задача о движении ансамбля классических частиц в поле периодического потенциала. Предложен метод генерации направленного баллистического транспорта с помощью осциллирующего по времени и по координате возмущения. Представленный метод позволяет существенно снизить требуемую для генерации потока частиц интенсивность возмущения. В частности, показано, что даже в том случае, когда ансамбль частиц изначально находится вблизи состояний устойчивого равновесия, направленный поток возникает при амплитуде возмущения порядка 10^{-2} от высоты потенциального барьера. Механизм генерации потока связан с созданием глобальной хаотической диффузии посредством резонансов между пространственными и временными колебаниями возмущения. В качестве примера рассмотрена модель нелинейного маятника.

PACS: 05.45.–a, 05.60.Cd

Появление направленного потока частиц при действии переменного возмущения с нулевым средним на ансамбль частиц, находящийся в поле периодического потенциала, стало в последнее время предметом активного исследования. Системы, демонстрирующие такое поведение, получили название рэтчетов [1]. Сам эффект уже нашел применение, например, для лазерной генерации постоянного тока в полупроводниковых суперрешетках в отсутствие внешнего кулоновского поля [2–4].

Образование рэтчетов так или иначе связано с потерей пространственной симметрии в микроскопической динамике [5]. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением классических гамильтоновых рэтчетов, в которых направленный транспорт возникает вследствие несимметричности хаотического слоя в фазовом пространстве [6–8]. Если ансамбль частиц изначально локализован вблизи минимумов потенциала, необходимым условием для появления потока является глобальный хаос в области финитного движения. Как правило, этого добиваются за счет увеличения интенсивности внешнего возмущения. В этом случае поток возникает тогда, когда интенсивность возмущения становится одного порядка с глубиной потенциальной ямы. В данной работе предлагается метод, позволяющий существенно снизить требуемую для генерации потока амплитуду возмущения. В частности, показано, что мы можем доби-

ваться баллистического транспорта при минимальных начальных энергиях частиц, действуя на них возмущением с амплитудой порядка 10^{-2} от глубины ямы.

Нелинейная динамика частиц в поле периодического потенциала описывается с помощью гамильтониана следующего вида:

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + U(x) + V(x, t), \quad (1)$$

где x и p – соответственно, координата и импульс рассматриваемой частицы, $U(x) = U(x + L)$ – периодический невозмущенный потенциал, $V(x, t)$ – внешнее возмущение с нулевым пространственным и временным средним. В качестве модели невозмущенного потенциала мы возьмем потенциал нелинейного маятника

$$U(x) = -\cos x. \quad (2)$$

Траектория частицы удовлетворяет уравнениям движения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (3)$$

При $H < 1$ частица локализована в одной из потенциальных ям и совершает колебательное движение. Под действием внешнего возмущения частица может пересечь сепаратрису и перейти в делокализованное состояние $H > 1$, в котором ее траектория приобретает форму баллистического полета. Направление

¹⁾e-mail: makarov@poi.dvo.ru

полета зависит от знака импульса при пересечении сепаратрисы. Если доли частиц, пересекающих сепаратрису с положительным и отрицательным значениями импульса, не равны, возникает ненулевой результирующий поток.

Предлагаемый нами метод генерации потока с заданным направлением связан с использованием внешнего возмущения в виде суммы слагаемых, каждое из которых имеет вид

$$V_i = \varepsilon_i [(1 - \alpha_i) \cos \Psi_i^+ + \alpha_i \cos \Psi_i^-], \quad (4)$$

где α меняется от 0 до 1, а фазы Ψ_i^\pm являются функциями как времени, так и пространственной координаты:

$$\Psi_i^\pm = k_i x \pm \Omega_i t. \quad (5)$$

Динамика нелинейного маятника с возмущением вида (4) рассматривалась во многих работах (см., например, известный обзор [9]). Структура фазового пространства системы (3) определяется множеством "обычных" нелинейных резонансов

$$m\omega = n\Omega_i, \quad (6)$$

где m и n – целые числа, ω – частота колебаний частицы внутри потенциальной ямы. Кроме того, значительное влияние на динамику системы оказывают резонансы комбинационных гармоник [10], а также резонансы, соответствующие условиям стационарности фаз Ψ_i^+ и Ψ_i^- (5):

$$k_i p + \gamma_i \Omega_i = 0, \quad (7)$$

где γ_i равно -1 при резонансе $d\Psi_i^+/dt$, и 1 – при резонансе $d\Psi_i^-/dt$. Условие (7) выполняется только при определенном значении импульса $p = p_{res}$, причем для резонанса с $\gamma_i = -1$ это значение положительно, а для резонанса с $\gamma_i = 1$ – отрицательно.

Достаточно легко показать, что резонанс (7) оказывает наибольшее влияние на те частицы, для которых $|p_{res}| = p_{max}$, где p_{max} – максимальное значение импульса [11]. Действительно, влияние резонанса (7) на колебательное движение частиц обратно пропорционально скорости изменения его расстройки $\Gamma_i = \gamma_i \Omega_i + k_i(p - p_{res})$ вблизи точки $p = p_{res}$. Производная $d\gamma_i/dt$ обращается в нуль при прохождении минимума потенциала, где модуль импульса достигает максимального значения. Отсюда следует, что эффект резонанса (7) будет максимален при $|p_{res}| = p_{max}$. С учетом вышесказанного резонансное условие (7) может быть переформулировано следующим образом:

$$p_{res} = p(H, x = x_{st}) = -\gamma_i \frac{\Omega_i}{k_i}, \quad (8)$$

где $x_{st} = 2\pi n$ – координата минимума потенциала. Согласно формуле (8), область значений энергии, соответствующая наибольшему влиянию резонанса (7), определяется параметрами возмущения Ω_i и k_i .

Даже при малых амплитудах возмущения одновременное влияние резонансов (6) и (7) приводит к сильному хаосу частиц со значениями энергии, близкими к резонансному (8). Для того, чтобы проиллюстрировать это, приведем результаты расчета сечений Пуанкаре для возмущения, состоящего из единственного члена вида (4). Сначала рассмотрим возмущение с параметрами $\varepsilon = 0.02$, $k = 10$, $\Omega = 2$, $\alpha = 0.5$. В этом случае присутствуют оба резонанса (7), с $\gamma_i = -1$ и с $\gamma_i = 1$, влияющие в основном на частицы с малыми энергиями, для которых $p_{max} = \Omega/k = 0.2$. В результате в области малых энергий возникает хаотический слой, что продемонстрировано на рис.1а. Этот хаотический слой изоли-

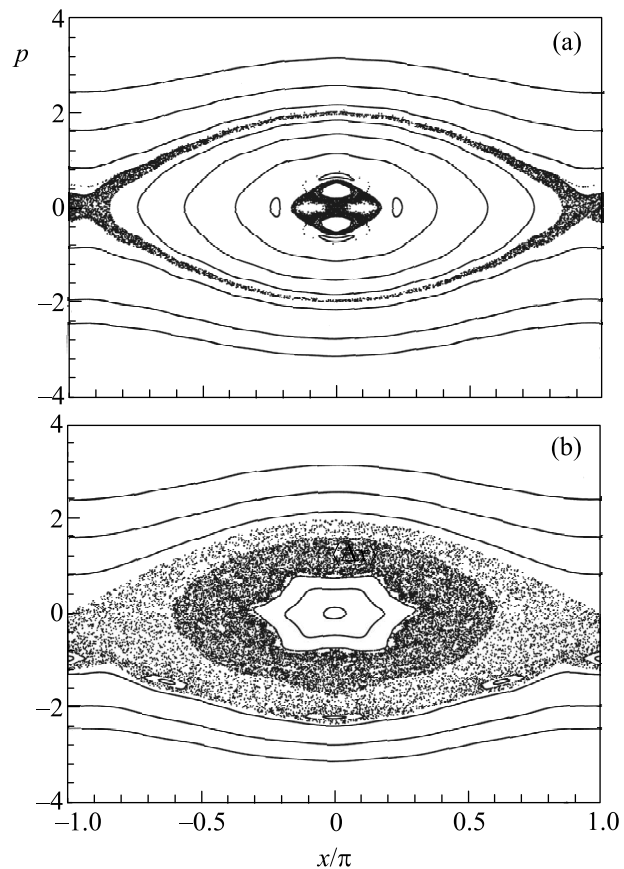


Рис.1. Сечения Пуанкаре для возмущения (4) со следующими значениями параметров: $\varepsilon = 0.02$, $k = 10$, $\Omega = 2$, $\alpha = 0.5$ (а), $\varepsilon = 0.02$, $k = 6$, $\Omega = 6$, $\alpha = 0$ (б)

рован от хаотического слоя, расположенного вблизи сепаратрисы, поэтому хаотическая диффузия низко-

энергетических частиц является ограниченной, а их переход в баллистический режим невозможен.

Рассмотрим теперь возмущение с параметрами $\varepsilon = 0.02$, $k = 6$, $\Omega = 6$, $\alpha = 0$. В этом случае присутствует только резонанс с $\gamma_i = -1$ и резонансным значением импульса $p_{\text{res}} = -1$. Соответствующее сечение Пуанкаре изображено на рис.1b. В этом случае образуется только внешний хаотический слой, расположенный вблизи сепаратрисы. Он проникает в достаточно глубокие области фазового пространства, достигая резонансной области, определяемой формулой (8). Поэтому его ширина значительно больше, чем ширина аналогичного присепаратрисного хаотического слоя, изображенного на рис.1a. Следует особо подчеркнуть резкое отличие ширины хаотического слоя при положительных и отрицательных значениях импульса. Эта асимметрия приводит к тому, что пересечение сепаратрисы в нижней полуплоскости, то есть с отрицательными значениями импульса, происходит гораздо интенсивнее, чем в верхней. Вследствие этого вероятность полетов в направлении $x = -\infty$ намного больше, чем в направлении $x = \infty$. В то же время центральная область фазового пространства представляет собой один сплошной остров устойчивости, и в силу “непроницаемости” его границ переход в баллистический режим возможен только для частиц с достаточно большой энергией.

Представленные примеры свидетельствуют о возможности создания режима сильной хаотической диффузии в отдельных областях фазового пространства, действуя на систему возмущением, состоящим из нескольких членов вида (4), каждый из которых создает отдельный резонанс (7). Хаотическая диффузия приводит к росту энергии частиц с последующим выходом из потенциальной ямы. При этом направление полета частицы после выхода определяется видом некоторого j -го члена, для которого зона наибольшего влияния резонанса (7) находится в непосредственной близости от сепаратрисы. Если $\alpha_j < 0.5$, тогда резонанс с $\gamma_j = -1$ доминирует над резонансом с $\gamma_j = 1$, что способствует преобладанию полетов в отрицательном направлении. Обратная ситуация возникает при $\alpha_j > 0.5$.

В то же время, для активации частиц с малыми энергиями необходимо разрушить сдерживающие их инвариантные кривые, то есть хаотический слой должен быть односвязным и покрывать все фазовое пространство. Односвязности хаотического слоя можно добиться без увеличения амплитуды возмущения, комбинируя, по меньшей мере, два возмущения вида (4): первое вызывает хаотическую диффузию в области малых энергий, а второе приводит к выходу

частицы из потенциальной ямы, попутно задавая направление полета частицы. В этом случае результирующее возмущение выглядит следующим образом:

$$V = \varepsilon_1 \cos k_1 x \cos \Omega_1 t + \varepsilon_2 [(1 - \alpha_2) \cos(k_2 x + \Omega_2 t) + \alpha_2 \cos(k_2 x - \Omega_2 t)]. \quad (9)$$

Для численной проверки высказанного утверждения рассмотрим возмущение с параметрами: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.02$, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0$, $k_1 = 10$, $k_2 = 6$, $\Omega_1 = 2$, $\Omega_2 = 6$, что соответствует одновременному действию сил, использованных нами при построении рис.1a,b. На рис.2а изображено соответствующее сечение Пуанкаре. За исключением нескольких островов, прак-

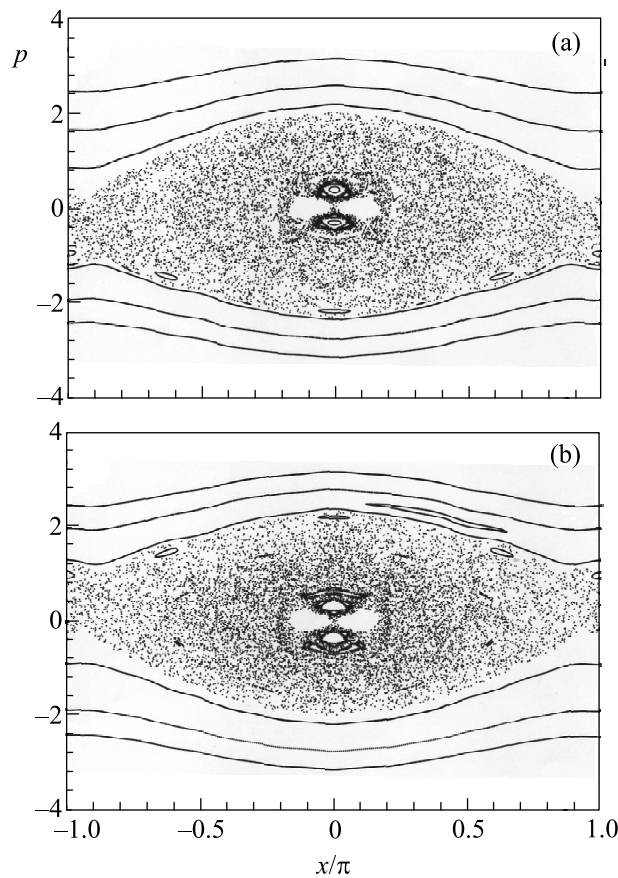


Рис.2. Сечения Пуанкаре для возмущения (9) с параметрами $\alpha_2 = 0$ (a), $\alpha_2 = 1$ (b)

тически вся область финитного движения погружена в хаотическое море. Все частицы, принадлежащие хаотическому морю, могут в процессе диффузии пересечь сепаратрису и попасть в область инфинитного движения. При этом, как и в предыдущем рассмотренном нами случае (см. рис.1b), несимметричность хаотического слоя способствует преобладанию полетов в направлении $x = -\infty$. Иная ситуация наблюдается при $\alpha_2 = 1$ (рис.2b), когда в присепаратрисной

области доминирует резонанс с $\gamma_2 = 1$ и, как следствие, преобладают полеты в направлении $x = \infty$.

Для количественной оценки транспорта рассмотрим динамику ансамбля из 10000 частиц с гауссовым начальным распределением по переменным импульса и координаты:

$$\rho(x, p, t = 0) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_p} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{p^2}{\sigma_p^2}\right), \quad (10)$$

где $\sigma_x = \sigma_p = 0.1$, то есть изначально все частицы находятся вблизи устойчивого состояния покоя $x = 0$, $p = 0$. На рис.3 изображены зависимости среднего смещения частицы $\langle \Delta x \rangle = \langle x - x(t=0) \rangle$ от време-

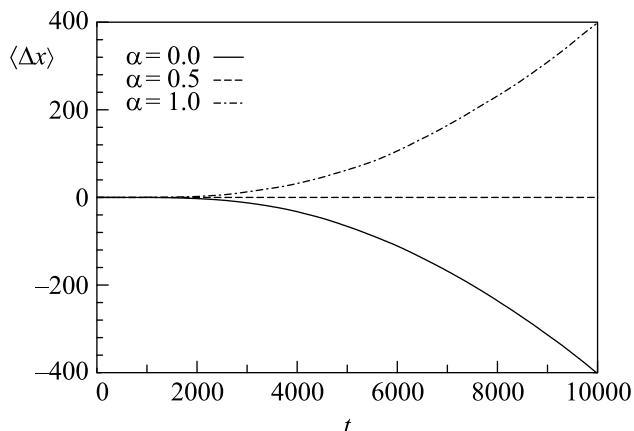


Рис.3. Зависимость среднего отклонения частиц $\langle \Delta x \rangle$ от времени

ни при $\alpha_2 = 0$, $\alpha_2 = 0.5$ и $\alpha_2 = 1$. Для остальных параметров возмущения использованы те же значения, что и при построении сечения Пуанкаре, изображенного на рис.2. Приблизительно до $t = 2000$ для всех значений α среднее смещение весьма мало. При $t > 2000$ достаточно большое количество частиц успевает пересечь сепаратрису и линии, соответствующие $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_2 = 1$, симметрично расходятся вниз и вверх. Таким образом, в обоих этих случаях возникает поток, направление которого определяется асимметрией хаотического слоя, обусловленной резонансами (7) и проиллюстрированной на рис.2. В то же время при $\alpha_2 = 0.5$ среднее смещение частиц остается практически равным нулю. Отметим, что среднее отклонение частиц при $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_2 = 1$ нарастает быстрее, чем по линейному закону. Учиты-

вая, что скорость летящих частиц ограничена внешней границей хаотического слоя по импульсу, можно сделать заключение, что нелинейность зависимости $\langle \Delta x \rangle(t)$ связана с тем, что со временем все большее число частиц пересекает сепаратрису и переходит в область инфинитного движения.

Таким образом, в данной работе мы продемонстрировали метод генерации направленного транспорта в пространственно-периодических гамильтоновых системах, позволяющий активировать низкоэнергетические частицы даже при малых амплитудах внешнего возмущения. Приведенный метод основан на создании режима сильной хаотической диффузии в фазовом пространстве с помощью комбинации возмущений вида (4). При этом каждое из них, посредством резонансов (7), вызывает хаос в отдельной зоне в фазовом пространстве, определяемой формулой (8). Путем подбора параметров k и Ω для каждой из компонент возмущения мы можем вызвать глобальную хаотическую диффузию во всем фазовом пространстве. Направление потока частиц определяется значением α_j , соответствующим компоненте возмущения, влияние которой сконцентрировано вблизи сепаратрисы.

Работа выполнена при поддержке грантов Президента России и Президиума Дальневосточного отделения РАН, а также Программы Президиума РАН "Математические методы в нелинейной динамике".

1. P. Reimann, Phys. Rep. **361**, 57 (2002).
2. E. Dupont et al., Phys. Rev. Lett. **74**, 3596 (1995).
3. A. Hache et al., Phys. Rev. Lett. **78**, 306 (1997).
4. K.N. Alekseev et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 2669 (1998).
5. S. Flach, O. Yevtushenko, and Y. Zolotaryuk, Phys. Rev. Lett. **84**, 2358 (2000).
6. S. Denisov and S. Flach, Phys. Rev. E **64**, 056236 (2001).
7. S. Denisov, J. Klafter, and M. Urbakh, Physica D **187**, 89 (2004).
8. H. Schanz, T. Dittrich, and R. Ketzmerick, Phys. Rev. E **71**, 026228 (2005).
9. B. V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 265 (1979).
10. В. В. Вечеславов, ЖТФ **72**, 20 (2002).
11. D. V. Makarov, M. Yu. Uleysky, and M. Yu. Martynov, E-print www.arXiv.org physics/0508226 (2005).