

Эффективное поле и сдвиг типа Блоха – Зигерта при бихроматическом возбуждении многофотонного ЭПР

А. П. Сайко¹⁾, Г. Г. Федорук⁺, С. А. Маркевич

Объединенный институт физики твердого тела и полупроводников НАН Беларусь, 220072 Минск, Беларусь

+ Institute of Physics, University of Szczecin, 70-451 Szczecin, Poland

Поступила в редакцию 16 июня 2006 г.

Изучена динамика многофотонных переходов в двухуровневой спиновой системе при ее возбуждении поперечным микроволновым и продольным радиочастотным полями с частотами ω_{mw} и ω_{rf} , соответственно. С помощью метода усреднения Крылова – Боголюбова – Митропольского получен эффективный гамильтониан системы “спин + бихроматическое поле”, не зависящий от времени и описывающий “одетые” спиновые состояния. Прямая регистрация временного поведения спиновой системы методом нестационарных нутаций позволила идентифицировать многофотонные переходы для резонансов $\omega_0 = \omega_{mw} + r\omega_{rf}$ (ω_0 – центральная частота линии ЭПР, $r = 1, 2$), измерить амплитуды эффективных полей этих переходов, установить особенности, вызванные неоднородным уширением линии ЭПР. Показано, что сдвиги типа Блоха – Зигерта для многофотонных резонансов при неоднородном уширении спектральных линий уменьшают только амплитуды нутаций, но не изменяют их частот.

PACS: 32.80.Wr, 33.35+g, 42.50.Gy

В связи с возможностями изменения внешними электромагнитными полями энергетических состояний квантовой системы и ее взаимодействия с окружением в последнее время активизировался интерес к изучению динамики многофотонных процессов в нелинейной оптике, ЯМР и ЭПР [1–8]. В случае двухуровневых спиновых систем реальных промежуточных уровней не существует, а их роль могут играть “одетые” спиновые состояния, формируемые внешними электромагнитными полями. Благодаря этому, на базе двухуровневой системы можно создавать динамическую многоуровневую квантовую систему с управляемыми свойствами. Исследование динамики одетых спиновых состояний открывает новые перспективы для развития методов сужения спектральных линий, разделения перекрывающихся спектров и увеличения времени существования когерентных спиновых состояний.

В импульсных ЭПР экспериментах, базирующихся на одновременном поглощении или испускании нескольких фотонов с заметно различающимися частотами, например микроволнового (МВ) и радиочастотного (РЧ) излучений, удалось наблюдать двух- и трехфотонное электронное спиновое эхо [1], двухфотонную нутацию [7], а также индуцированную РЧ полем прозрачность [3] и нутацию на “одетых” состояниях [4, 5]. Из-за малой амплитуды эффективного поля (эффективной частоты Раби) многофотонных

переходов, а также наличия в реальных системах неоднородного уширения линий по-прежнему остаются трудности прямого наблюдения динамики этих переходов и ее количественной интерпретации на основе адекватных теоретических подходов.

В настоящей работе теоретически и экспериментально изучена динамика многофотонных переходов в двухуровневой спиновой системе с неоднородным уширением линии ЭПР при ее возбуждении бихроматическим (поперечным МВ и продольным РЧ) излучением. Для этого использовано явление нестационарной нутации, которая во временном масштабе отражает динамику квантовых переходов, причем частота нутаций непосредственно определяется эффективным полем взаимодействия. Прямое наблюдение динамики взаимодействия излучения со спиновой системой позволило выявить обусловленные неоднородным уширением особенности многофотонных переходов.

В полуклассическом приближении гамильтониан электронной спиновой системы (спин $S = 1/2$), находящейся в линейно поляризованном МВ поле, направленном вдоль оси x лабораторной системы координат, а также в линейно поляризованном РЧ и статическом магнитном полях, направленных вдоль оси z , можно записать в виде

$$H(t) = \omega_0 s^z + 2\omega_1 \cos(\omega_{mw} t + \varphi) s^x + 2\omega_2 \cos(\omega_{rf} t + \psi) s^z, \quad (1)$$

¹⁾e-mail: saiko@ifttp.bas-net.by

где $\omega_0 = \gamma B_0$ – резонансная частота спиновых переходов в магнитном поле B_0 , γ – гиромагнитное отношение электрона, $\omega_1 = \gamma B_1$ и $\omega_2 = \gamma B_2$ – частоты Раби, B_1 , B_2 , ω_{mw} , ω_{rf} и φ , ψ – амплитуды, частоты и фазы МВ и РЧ полей, соответственно.

Временная эволюция спиновой системы описывается оператором плотности ρ , который подчиняется уравнению Лиувилля

$$i\frac{\partial\rho}{\partial t} = [H(t), \rho] \quad (2)$$

(постоянная Планка $\hbar = 1$).

При наличии малого параметра ω_1/ω_{rf} (или ω_2/ω_{rf}) изучение эволюции спиновой системы с зависящим от времени гамильтонианом (1) может быть осуществлено в рамках теории возмущений с использованием процедуры усреднения по быстрым осцилляциям, разработанной Крыловым – Боголюбовым – Митропольским (КБМ) [9].

В рассматриваемом случае удобно сначала перейти к новой системе координат, совершив следующее каноническое преобразование:

$$\rho \rightarrow \rho' = U^+ \rho U, \quad (3)$$

$$U = \exp\left\{-i2 \int^t d\tau \omega_2 \cos(\omega_{rf}\tau + \psi) s^z\right\}.$$

В результате уравнение (2) примет вид

$$i\frac{\partial\rho'}{\partial t} = [H(t), \rho'] \equiv [H_0 + H_1(t), \rho'], \quad (4)$$

где

$$H_0 = \omega_0 s^z, \quad (5)$$

$$H_1(t) = \omega_1 e^{-i(\omega_{mw}t + \varphi)} e^{i\frac{2\omega_2}{\omega_{rf}} \sin(\omega_{rf}t + \psi)} s^+ + \text{h.c.} = \\ = \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{2\omega_2}{\omega_{rf}} \right) e^{-i(\omega_{mw} - n\omega_{rf})t} e^{-i(\varphi - n\psi)} s^+ + \text{h.c.}; \quad (6)$$

$J_n(x)$ – функция Бесселя аргумента x ; при получении (6) мы пренебрегли в операторе $\cos(\omega_{mw}t + \varphi)s^z$ исходного гамильтониана “антивращающимися” слагаемыми. Реализация метода КБМ в каноническом формализме [9] (см. также [10]) состоит в исключении быстро осциллирующих слагаемых в гамильтониане $H_1(t)$ в любом порядке теории возмущений по параметру ω_1/ω_{rf} (малость которого предполагается). Это приводит к эффективному гамильтониану системы, не зависящему от времени, и существенно

упрощает задачу определения эволюции ее динамических переменных.

Если квантовая система описывается гамильтонианом $H = H_0 + H_1(t)$, где H_0 – невозмущенная, “диагональная”, часть оператора энергии, а $H_1(t)$ – малое возмущение, “недиагональный” член, то в представлении взаимодействия,

$$\tilde{H}_1(t) = e^{iH_0 t} H_1(t) e^{-iH_0 t}, \quad (7)$$

быстрое движение с периодом $2\pi/\|H_0\|$ накладывается на более медленную эволюцию системы, характеризующуюся временем $\|H_1\|^{-1}$, так как $\|H_0\| \gg \gg \|H_1\|$ по предположению (здесь $\|H\|$ означает величину оператора H в единицах частоты). Применение процедуры усреднения [9, 10] к уравнению для матрицы плотности $\sigma = e^{iH_0 t} \rho' e^{-iH_0 t}$, $i\partial\sigma/\partial t = [\tilde{H}_1(t), \sigma]$, приводит к устранению в нем быстро осциллирующих членов. В результате получается уравнение

$$i\partial < \sigma > / \partial t = [H_{\text{eff}}, < \sigma >] \quad (8)$$

для усредненной матрицы плотности $< \sigma >$, представляющей медленную эволюцию системы на временах $\|H_1\|^{-1}$ с приближенно “диагональным” эффективным гамильтонианом H_{eff} (операция усреднения обозначена как

$$\langle A(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt,$$

T – период быстрых осцилляций, равный $2\pi/\|H_0\|$ или кратный этой величине). Например, вплоть до третьего порядка по взаимодействию эффективный гамильтониан приобретает вид [9]

$$H_{\text{eff}} = H_{\text{eff}}^{(1)} + H_{\text{eff}}^{(2)} + H_{\text{eff}}^{(3)}, \quad (9)$$

$$H_{\text{eff}}^{(1)} = \langle \tilde{H}_1(t) \rangle, \quad (10)$$

$$H_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{i}{2} \langle \left[\int^t d\tau (\tilde{H}_1(\tau) - \langle \tilde{H}_1(\tau) \rangle), \tilde{H}_1(t) \right] \rangle, \quad (11)$$

$$H_{\text{eff}}^{(3)} = -\frac{1}{3} \langle \left[\int^t d\tau (\tilde{H}_1(\tau) - \langle \tilde{H}_1(\tau) \rangle), \left[\int^t d\tau \times \right. \right. \rangle$$

$$\left. \times (\tilde{H}_1(\tau) - \langle \tilde{H}_1(\tau) \rangle), (\tilde{H}_1(t) + \frac{1}{2} \langle \tilde{H}_1(t) \rangle) \right] \rangle, \quad (12)$$

где $[,]$ – коммутатор.

Таким образом, эволюция системы уже определяется не содержащим быстрой зависимости от времени гамильтонианом H_{eff} , вычисляемым по формулам (7)–(12) с использованием выражений (5) и (6) для H_0 и $H_1(t)$.

При нахождении H_{eff} будем предполагать, что выполняется условие резонанса

$$\omega_0 - \omega_{mw} - r\omega_{rf} + \delta = 0, \quad (13)$$

где r – целое (положительное или отрицательное) число поглощаемых или испускаемых квантов РЧ поля, δ – некоторая отстройка от резонанса, причем $\delta \ll \omega_{rf}$, а $\omega_{mw}, \omega_0 \gg \omega_{rf}$. Подставляя (5) и (6) в (7), (10) – (12), получаем

$$H_{\text{eff}}(r, \delta t) = H_{\text{eff}}^{(1)}(r, \delta t) + H_{\text{eff}}^{(2)}(r) + H_{\text{eff}}^{(3)}(r, \delta t),$$

$$H_{\text{eff}}^{(1)}(r, \delta t) = \omega_1^{(1)}(r) e^{-i\delta t} e^{-i(\varphi+r\psi)} s^+ + \text{h.c.}, \quad (14)$$

$$H_{\text{eff}}^{(2)}(r) = \Delta_{BS}(r) s^z, \quad (15)$$

$$H_{\text{eff}}^{(3)}(r, \delta t) = \omega_1^{(3)}(r) e^{-i\delta t} e^{-i(\varphi+r\psi)} s^+ + \text{h.c.}, \quad (16)$$

$$\omega_1^{(1)}(r) = \omega_1 J_{-r}(z), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \omega_1^{(3)}(r) = & -\frac{2}{3}\omega_1^3 \left\{ \sum_{n, n' \neq -r} \frac{J_n(z) J_{n'}(z)}{((r+n)\omega_{rf} - \delta)} \times \right. \\ & \times \frac{(J_{n+n'+r}(z) + J_{n'-n-r}(z))}{((r+n')\omega_{rf} - \delta)} - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n \neq -r} \frac{J_n(z) J_{-n-2r}(z) J_{-r}(z)}{(r+n)^2 \omega_{rf}^2 - \delta^2} + \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{n \neq -r} \frac{J_n^2(z) J_{-r}(z)}{((r+n)\omega_{rf} - \delta)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\Delta_{BS}(r) = \sum_{n \neq r} \frac{2\omega_1^2}{(r-n)\omega_{rf} - \delta} J_n^2(z); \quad (19)$$

во всех функциях Бесселя аргументом является выражение $z = 2\omega_2/\omega_{rf}$, а аргумент δt в $H_{\text{eff}}(r, \delta t)$ отражает медленную зависимость от времени благодаря наличию “медленных” множителей $e^{\pm i\delta t}$. От них можно избавиться, если перейти в систему координат, врачающуюся с частотой δ (13):

$$H_{\text{eff}}(r, \delta t) \rightarrow H_{\text{eff}}(r) = (\omega_0 + \Delta_{BS}(r) - \omega_{mw} - r\omega_{rf}) s^z + H_{\text{eff}}^{(1)}(r) + H_{\text{eff}}^{(3)}(r), \quad (20)$$

где $H_{\text{eff}}^{(1), (3)}(r) \equiv H_{\text{eff}}^{(1), (3)}(r, \delta t = 0)$.

Согласно (14), (16) и (20), амплитуда эффективного поля вплоть до третьего порядка по параметру ω_1/ω_{rf} равна

$$\omega_{\text{eff}}(r) = \omega_1^{(1)}(r) + \omega_1^{(3)}(r), \quad (21)$$

где $\omega_1^{(1)}(r)$ и $\omega_1^{(3)}(r)$ определены в (17) и (18).

Гамильтониан $H_{\text{eff}}^{(1)}(r)$ описывает процессы поглощения (испускания) одного кванта МВ поля и r квантов РЧ поля, причем из-за присутствия в эффективной частоте Раби (эффективной амплитуде МВ поля) функции Бесселя аргумента $2\omega_2/\omega_{rf}$ указанные процессы сопровождаются множественными фотонными переходами. Например, одновременно с поглощением одного кванта МВ поля и r квантов РЧ поля может виртуально поглощаться (испускаться) m квантов и испускаться (поглощаться) m квантов РЧ поля (m – произвольное целое число). Член $H_{\text{eff}}^{(3)}(r)$ является поправкой к эффективной амплитуде поля третьего порядка по ω_1/ω_{rf} , заметной для не слишком малых значений ω_1/ω_{rf} . Величина $\Delta_{BS}(r)$ в $H_{\text{eff}}^{(2)}(r)$ представляет собой смещение резонансной частоты многофотонного перехода – сдвиг типа Блоха – Зигерта, обусловленный взаимодействием спиновой системы с нерезонансными гармониками РЧ поля. Из (19) видно, что для $r = 0, \delta = 0$ сдвиг равен нулю.

На основе (20) с учетом (21) получаем следующее выражение для абсорбционной компоненты нутационного сигнала (см., например, [11]):

$$v(t) \sim \frac{\omega_{\text{eff}}(r)}{\beta(\Delta, r)} \exp \left\{ -\frac{1}{T_2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{\text{eff}}^2(r)}{\beta^2(\Delta, r)} \right) t \right\} \times \sin(2\pi\beta(\Delta, r)t); \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \beta(\Delta, r) &= \sqrt{\omega_{\text{eff}}^2(r) + \delta^2(\Delta, r)}, \\ \delta(\Delta, r) &= -\delta + \Delta_{BS}(r) + \Delta, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\delta(\Delta, r)$ – отстройка от резонанса, состоящая из отстройки от центра линии δ и стохастической компоненты Δ , а также сдвига типа Блоха – Зигерта $\Delta_{BS}(r)$; T_2 – время спин-спиновой релаксации. В случае медленных флуктуаций Δ описывает неоднородное уширение спинового перехода. Сигнал нутаций (22) должен быть усреднен по Δ с весовой функцией гауссовского вида $g(\Delta) = (T_2^*/\sqrt{\pi}) \exp(-\Delta^2 T_2^{*2})$:

$$\langle v(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta g(\Delta) v(t), \quad (24)$$

где T_2^* – время обратимой фазовой релаксации. При этом зависимостью от Δ (через δ) в выражениях (17)–(19) можно пренебречь.

Исследование нестационарной нутации, возбуждаемой рассматриваемым бихроматическим излучением, выполнено на созданном нами импульсном спектрометре ЭПР 3-сантиметрового диапазона [7]. При этом использовались непрерывные МВ и РЧ поля, а установление резонанса осуществлялось импульсом продольного магнитного поля. Первоначально равновесная спиновая система находилась в нерезонансном статическом магнитном поле $B = B_0 - \Delta B$. Затем в момент времени $t = 0$ магнитное поле импульсно изменялось до значения B_0 , реализующего многофотонный резонанс. За счет эффекта Зеемана в результате скачка магнитного поля ΔB частота квантового перехода спиновой системы изменялась до значения ω_0 и становилась равной сумме частот МВ и РЧ полей. На время действия импульса устанавливалось резонансное взаимодействие суммарного МВ и РЧ полей со спиновой системой. Время установления резонансных условий составляло около 120 нс и было существенно меньше времен спин-решеточной (T_1) и спин-спиновой (T_2) релаксаций, что обеспечивало возбуждение многофотонной нутации.

РЧ поле и импульс магнитного поля создавались пропусканием тока через один и тот же модуляционный элемент, находящийся внутри измерительного резонатора. Амплитуды МВ и РЧ полей определялись с точностью около 5% и (в частотных единицах) не превышали 1.5 МГц. Для улучшения отношения сигнал/шум использовалось многоканальное цифровое суммирование сигналов. Привязка фазы РЧ поля к началу импульса магнитного поля отсутствовала.

Эксперименты выполнены при комнатной температуре. В качестве двухуровневой спиновой системы использовались $E_{1/2}$ -центры в кристаллическом кварце, облученном нейтронами [7]. Статическое магнитное поле было параллельным оптической оси кристалла. Спектр ЭПР $E_{1/2}$ -центров при данной ориентации состоит из одиночной линии с шириной $\Delta B = 0.016$ мТл. При этом длительность импульсов магнитного поля составляла 10 мкс, их амплитуда $\Delta B = 0.12$ мТл, а период повторения импульсов – 1.25 мс.

На рис.1 представлены абсорбционные сигналы нутаций ЭПР $E_{1/2}$ -центров, зарегистрированные при фиксированной амплитуде МВ поля ($\omega_1/2\pi = 1.33$ МГц) для одно-, двух- и трехфотонного резонансов. Сигнал на рис.1а, зарегистрированный при $\omega_{mw} = \omega_0$ и $\omega_2 = 0$, является обычной однофотонной нутацией. Многофотонная нутация с участием виртуальных РЧ фотонов, наблюдавшаяся при двух-

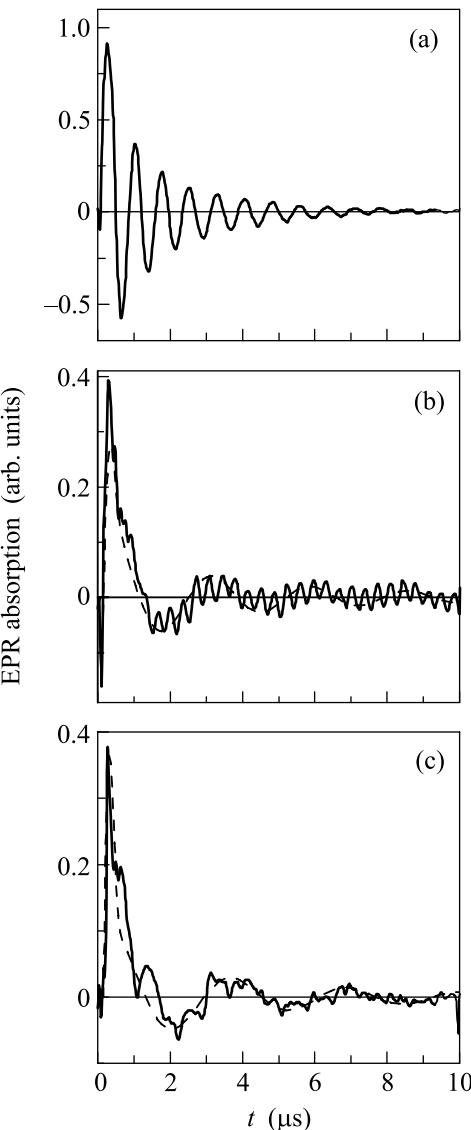


Рис.1. Нутационные сигналы ЭПР $E_{1/2}$ -центров, зарегистрированные при амплитуде МВ поля $\omega_1/2\pi = 1.33$ МГц. Однофотонная ($\omega_2 = 0$) нутация (а), многофотонная нутация при двухфотонном ($r = 1$, $\omega_{rf} = 2.8$ МГц, $z = 0.57$) и трехфотонном ($r = 2$, $\omega_{rf} = 1.4$ МГц, $z = 1.50$) резонансах (б) и (с), соответственно

фотонном резонансе $\omega_0 = \omega_{mw} + \omega_{rf}$ ($r = 1$, $\omega_{rf} = 2.8$ МГц, $z = 0.57$), приведена на осциллограмме (б). На рис.2 схематически изображены простейшие многофотонные переходы, возбуждаемые в этом случае. Осциллограмма (с) на рис.1 иллюстрирует многофотонную нутацию, наблюдавшуюся при трехфотонном резонансе $\omega_0 = \omega_{mw} + 2\omega_{rf}$ ($r = 2$, $\omega_{rf} = 1.4$ МГц, $z = 1.50$).

Регистрируемый сигнал являлся усреднением большого числа (10^3) сигналов, полученных при

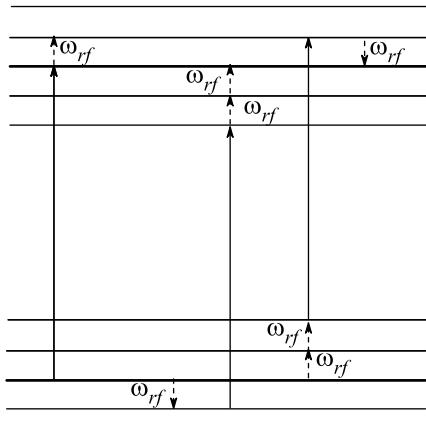


Рис.2. Простейшие многофотонные переходы, возбуждаемые при $\omega_0 = \omega_{mw} + \omega_{rf}$

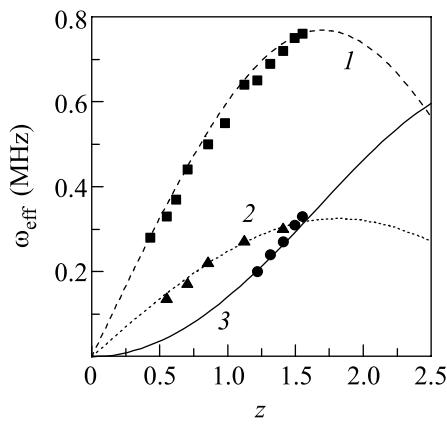


Рис.3. Зависимости частот многофотонных нутаций, возбуждаемых при двух- и трехфотонном резонансе, от параметра $z = 2\omega_2/\omega_{rf}$. 1 – $r = 1$, $\omega_1/2\pi = 1.33$ МГц; 2 – $r = 1$, $\omega_1/2\pi = 0.56$ МГц; 3 – $r = 2$, $\omega_1/2\pi = 1.33$ МГц

случайной фазе РЧ поля. Это позволило уменьшить сопутствующие осцилляции сигналов на частотах ω_{rf} и $2\omega_{rf}$ и улучшить детектирование многофотонной нутации.

В силу неоднородного уширения линии ЭПР $E_1 t$ -центров частоты наблюдавшихся нутаций практически не зависят от отстройки δ от резонанса. Частота однофотонной нутации в отсутствие РЧ поля равна частоте Раби $\omega_1 = \gamma B_1$. Пунктирными линиями на рис.1б и 1с представлены результаты расчета по формуле (24) для $T_2 = 4$ мкс и $T_2^* = 1$ мкс. Рассчитанные зависимости хорошо согласуются с наблюдаемыми сигналами. При этом частоты многофотонных нутаций при двух- и трехфотонном резонансе в пределах погрешности измерений соответствуют амплитудам эффективных полей, рассчитанным по формулам (17), (18) и (21).

На рис.3 представлены теоретические и измеренные зависимости частот многофотонных нутаций, возбуждаемых при двух- ($r = 1$) и трехфотонном ($r = 2$) резонансах, от параметра $z = 2\omega_2/\omega_{rf}$ (нормированной амплитуды РЧ поля). Частота РЧ поля изменялась в диапазоне $\omega_{rf} = 1.35 \div 3.5$ МГц.

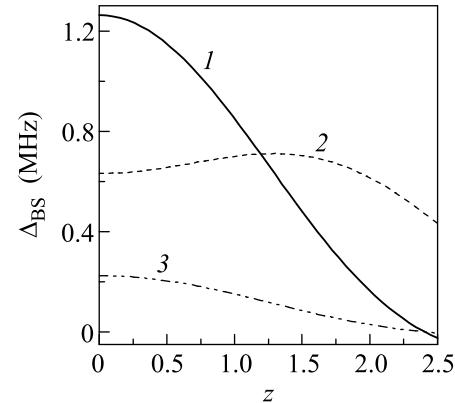


Рис.4. Зависимости сдвигов типа Блоха – Зигерта от z при двух- и трехфотонном резонансе для $\omega_{rf}/2\pi = 2.8$ МГц. 1 – $r = 1$, $\omega_1/2\pi = 1.33$ МГц; 2 – $r = 2$, $\omega_1/2\pi = 1.33$ МГц; 3 – $r = 1$, $\omega_1/2\pi = 0.56$ МГц

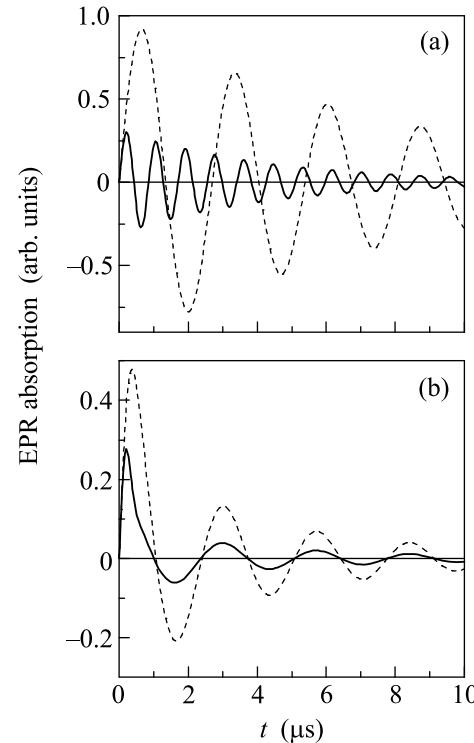


Рис.5. Поведение нутационных сигналов для однородно (а) и неоднородно (б) уширенной линии для $r = 1$ при $\omega_1/2\pi = 1.33$ МГц, $\omega_{rf}/2\pi = 2.8$ МГц, $z = 0.57$. Пунктирными линиями изображены сигналы в отсутствие сдвига типа Блоха – Зигерта

Непосредственным образом во временном поведении нутационных сигналов проявляется наличие частотных сдвигов типа Блоха – Зигерта для многофотонных резонансов (рис.4). В зависимости от характера уширения резонансных линий это проявление различается качественно. А именно, для однородно уширенной линии амплитуда нутаций уменьшается, а их частота увеличивается (по сравнению со случаем, когда сдвиг отсутствует); для неоднородно уширенной линии уменьшается только амплитуда при неизменной частоте нутаций (рис.5). Это связано с тем, что при неоднородном уширении сдвиг типа Блоха – Зигерта выводит из резонанса только часть спиновых пакетов, а оставшиеся пакеты по-прежнему находятся в резонансе. В то время как при однородном уширении из резонанса выводятся все спиновые пакеты, и в соответствии с формулой (23) частота нутаций увеличивается, а амплитуда уменьшается.

Таким образом, с помощью нестационарной нутации проведено прямое наблюдение многофотонных переходов при двух- и трехфотонном резонансах бихроматического поля с двухуровневой спиновой системой. Использование метода усреднения Крылова – Боголюбова – Митропольского позволило вычислить эффективные амплитуды полей и частотные сдвиги

типа Блоха – Зигерта, напрямую связанные с частотой и амплитудой наблюдавшихся нутационных сигналов. Установлено, что сдвиг типа Блоха – Зигерта для неоднородно уширенной линии уменьшает только амплитуду нутации, но не изменяет частоты нутаций в отличие от случая однородного уширения.

1. I. Gromov and A. Schweiger, *J. Magn. Res.* **146**, 110 (2000).
2. M. Fedin, M. Kälin, I. Gromov, and A. Schweiger, *J. Chem. Phys.* **120**, 1361 (2003).
3. M. Kälin, I. Gromov, and A. Schweiger, *Phys. Rev. A* **69**, 033809 (2004).
4. G. Jeschke, *Chem. Phys. Lett.* **301**, 524 (1999).
5. Г. Г. Федорук, *ФТТ* **46**, 1581 (2004).
6. P. T. Eles and C. A. Michal, *J. Chem. Phys.* **121**, 10167 (2004).
7. Г. Г. Федорук, *ЖЭТФ* **127**, 1216 (2005).
8. H. Hatanaka, M. Sugiyama, and N. Tabuchi, *J. Magn. Res.* **165**, 293 (2003).
9. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, М.: Наука, 1974.
10. А. П. Сайко, *ФТТ* **35**, 38 (1993).
11. Э. А. Маныкин, В. В. Самарцев, *Оптическая эхоспектроскопия*, М.: Наука, 1984.