Письма в ЖЭТФ, том 84, вып. 4, с. 238 – 242 © 2006 г. 25 августа

Излучение фононов вихревыми нитями и распад турбулентного состояния в бозе-конденсате

П. А. Кузьмин[1)]

Физический факультет МГУ, кафедра квантовой статистики и теории поля, 119899 Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 июля 2006 г.

После переработки 17 июля 2006 г.

Изучается механизм распада турбулентности в бозе-конденсате (сверхтекучей жидкости), связанный с излучением звуковых волн при пересоединении вихревых нитей. Развивается подход, основанный на уравнении марковской эволюции для распределения вихревых колец по длинам. Получены уравнения эволюции плотности вихревых нитей для квазистационарного и неквазистационарного режимов. Закон распада сопоставлен с результатами численного моделирования.

PACS: 47.37.+q, 67.40.Vs, 98.80.Cq

Выяснение механизма распада турбулентного состояния сверхтекучей жидкости является важной задачей гидродинамики [1]. При температурах $T > 1\,\mathrm{K}$ основными факторами диссипации оказываются вязкость нормальной компоненты и взаимное трение. В случае более низких температур названные источники рассеяния энергии турбулентного состояния отсутствуют, так как плотность нормальной компоненты мала. Эксперимент, однако, обнаруживает не зависящую от температуры диссипацию квантовой турбулентности [2]. В работах [3 – 5] указана возможность распада турбулентности за счет излучения звуковых волн в акте пересоединения вихрей (vortex reconnection) [6] и при распространении волн Кельвина.

В данной работе изучается закон эволюции предоставленного самому себе хаотического однородного и изотропного вихревого клубка в бесконечном пространстве. Температура предполагается настолько малой, что плотностью нормальной компоненты и взаимным трением можно пренебречь. Основным результатом является закон (13) быстрого, существенно нестационарного распада плотного вихревого клубка. Применяется подход к анализу эволюции вихревого клубка, основанный на уравнении марковской эволюции для распределения вихревых колец по длинам. Такая методика была развита в работах [7, 8] для космических струн и использована в недавней работе [9] для получения стационарного распределения вихревых колец по длинам в сверхтекучем гелии. В рамках данного подхода в работе [9] также установлена связь среднего радиуса кривизны нити со средним расстоянием между нитями в стационарном вихревом клубке, получено уравнение Вайнена для распада турбулентности в квазистационарном режиме за счет волн Кельвина, вычислена частота пересоединений для стационарного состояния.

Кратко напомним основные результаты работы [9]. Турбулентность в бозе-конденсате рассматривается как хаотический клубок вихревых нитей, взаимодействующих при пересечении. В численных экспериментах, основанных на уравнении Гросса–Питаевского, установлено, что при сближении вихревых нитей с достоверностью происходит их пересоединение, сопровождающееся излучением волн (импульсов разрежения) и возмущением самих нитей. В рассматриваемой в работе [9] модели состояние в момент времени t задается плотностью распределения $n(l,t)$ вихревых петель по длинам. Пересоединения нитей могут влиять на плотность распределения двояким образом: пересоединение может приводить к слиянию двух петель длинами l_1 и l_2 в одну петлю длиной $l \leqslant l_1 + l_2$ или к распаду одной петли длиной l на две длинами l_1 и l_2, $l_1 + l_2 \leqslant l$. Эти процессы могут сопровождаться излучением фононов. Заметим, что возможен процесс рассеяния кольца на кольце, как это показано в численном эксперименте [10] для солитонных решений – вихревых колец, распространяющихся в одном направлении. Однако при этом происходят два пересоединения одновременно, и этот процесс является маловероятным. По этой причине, следуя [9], в данной работе он также не учитывается. В работах [7, 11] вычислены вероятность слияния $A(l_1,l_2,l)$ двух вихревых петель в одну $l_1+l_2 \to l = l_1+l_2$ и вероятность распада $B(l_1,l_2,l)$ вихревой петли $l \to l_1+l_2$. Обе вероятности вычислены в предположении о броуновском случайном блуждании петель и выражаются формулами

[1)]e-mail: kuzminp@list.ru

$$A(l_1,l_2,l)=b_mV_ll_1l_2,$$
$$B(l_1,l_2,l)=b_sV_ll(\xi_0l_1)^{-3/2}. \tag{1}$$

Здесь b_m, b_s – некоторые константы, V_l – характерная скорость вихревых нитей, связанная с радиусом кривизны нити ξ соотношением $V_l=\kappa/\xi$, где κ – квант циркуляции, в безразмерных единицах равный 2π. Если не указано обратное, далее все формулы и оценки записываются в безразмерных единицах, в которых за единицу длины принимается длина когерентности (радиус кора), а квант циркуляции равен 2π. Такие единицы обезразмеривают уравнение Гросса–Питаевского. Величина ξ_0 обозначает средний радиус кривизны вихревых нитей и является основным параметром теории. Рассматриваемая модель применима только на масштабах, превосходящих ξ_0, и в работах [9, 7, 8] эта величина использована как параметр обрезания снизу. В [9] исследовано стационарное решение кинетического уравнения для состояния $n(l,t)$:

$$\partial n(l,t)/\partial t=I_0\left[n(l,t)\right], \tag{2}$$

где интеграл столкновений I_0 имеет вид

$$\begin{aligned}I_0\left[n(l,t)\right]=&\\=\int A(l_1,l_2,l)n(l_1,t)n(l_2,t)\delta(l-l_1-l_2)dl_1dl_2-&\\-\int A(l_1,l,l_2)n(l,t)n(l_1,t)\delta(l_2-l_1-l)dl_1dl_2-&\\-\int A(l_2,l,l_1)n(l,t)n(l_2,t)\delta(l_1-l_2-l)dl_1dl_2-&\\-\int B(l_1,l_2,l)n(l,t)\delta(l-l_1-l_2)dl_1dl_2+&\\+\int B(l,l_2,l_1)n(l_1,t)\delta(l_1-l_2-l)dl_1dl_2+&\\+\int B(l,l_1,l_2)n(l_2,t)\delta(l_2-l_1-l)dl_1dl_2.&\end{aligned} \tag{3}$$

В работе [9] получено стационарное решение кинетического уравнения

$$n_0(l)=C_{\rm VLD}\xi_0^{-3/2}l^{-5/2}, \tag{4}$$

где $C_{\rm VLD}$ – некоторая константа порядка единицы. В данной заметке мы интересуемся поведением плотности (полной длины) вихревых нитей

$$\mathcal{L}(t)=\int l\cdot n(l,t)dl. \tag{5}$$

В [9] установлено, что полная длина вихревых нитей в стационарном состоянии имеет вид

$$\mathcal{L}=\int\limits_{\xi_0}^{\infty} l\cdot n(l)dl=\frac{2}{3}\frac{C_{\rm VLD}}{\xi_0^2}, \tag{6}$$

чем показано, что среднее расстояние между вихревыми нитями $\mathcal{L}^{-\frac{1}{2}}$ в стационарном состоянии имеет порядок среднего радиуса кривизны ξ_0 – факт, обнаруженный ранее в численных экспериментах. В процессе эволюции состояния $n(l,t)$ согласно кинетическому уравнению с интегралом столкновений I_0 в каждом из актов слияния или расщепления вихревых петель длина петли сохраняется, следовательно, должно иметь место равенство $d\mathcal{L}/dt=0$. Прямая проверка этого равенства может быть проведена подстановкой $\partial n(l,t)/\partial t$ в (5), но выражение $\int lI_0\left[n(l,t)\right]dl$ содержит расходимости и требует регуляризации [12].

На основе кинетического уравнения (2) в [9] получено выражение для верхней границы скорости убывания плотности вихревых нитей при наличии механизмов распада малых вихревых колец в фононы:

$$-d\mathcal{L}/dt\leqslant C_{\rm Vinen}\kappa\mathcal{L}^2(t), \tag{7}$$

где $C_{\rm Vinen}$ – константа, не зависящая от ξ_0. Из совпадения правой части (7) с правой частью уравнения Вайнена не следует, что имеет место квантовый режим турбулентности [13, 18].

Основной целью настоящей работы является выяснение закона убывания плотности вихревых нитей $\mathcal{L}(t)$ в бозе-конденсате за счет потерь энергии на излучение в акте пересоединения нитей. Величина потери длины вихревой нити вычислена в численном эксперименте [10], основанном на уравнении Гросса–Питаевского, в этой же работе установлена зависимость потери длины от угла пересечения вихревых нитей. Из результатов работы [10] видно, что потеря длины при пересоединении составляет несколько безразмерных единиц длины. В данной работе потеря длины при каждом пересоединении предполагается постоянной и равной Δl.

Пусть при каждом слиянии петель теряется длина Δl, а при распаде вихревой петли обе новые петли теряют длину $\Delta l/2$. Исходя из этих предположений, можно записать новый интеграл столкновений, учитывающий диссипацию энергии при пересоединении:

$$\begin{aligned}I\left[n(l,t)\right]=&\\=\int A(l_1,l_2,l)n(l_1,t)n(l_2,t)\delta(l+\Delta l-l_1-l_2)dl_1dl_2-&\\-\int A(l_1,l,l_2)n(l,t)n(l_1,t)\delta(l_2+\Delta l-l_1-l)dl_1dl_2-&\\-\int A(l_2,l,l_1)n(l,t)n(l_2,t)\delta(l_1+\Delta l-l_2-l)dl_1dl_2-&\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\int B\left(l_1+\frac{\Delta l}{2}, l_2+\frac{\Delta l}{2}, l\right) n(l,t)\times \\
&\quad\times\delta(l-\Delta l-l_1-l_2)dl_1dl_2+ \\
&+\int B(l+\frac{\Delta l}{2}, l_2+\frac{\Delta l}{2}, l_1)n(l_1,t)\times \\
&\quad\times\delta(l_1-\Delta l-l_2-l)dl_1dl_2+ \\
&+\int B(l+\frac{\Delta l}{2}, l_1+\frac{\Delta l}{2}, l_2)n(l_2,t)\times \\
&\quad\times\delta(l_2-\Delta l-l_1-l)dl_1dl_2,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

который совпадает с (3) при $\Delta l = 0$. Произведя замену $l_2 \mapsto l_2 - \Delta l$ во втором интеграле, замену $l_1 \mapsto l_1 - \Delta l$ в третьем, и $l_1 \mapsto l_1 - \Delta l/2$, $l_2 \mapsto l_2 - \Delta l/2$ – в четвертом, а также заметив, что пятый и шестой интегралы совпадают, запишем разность $I[n(l,t)] - I_0[n(l,t)]$:

$$
\begin{aligned}
&I[n(l,t)]-I_0[n(l,t)]= \\
&=\int A(l_1,l_2,l)n(l_1,t)n(l_2,t)\delta(l+\Delta l-l_1-l_2)dl_1dl_2- \\
&-\int A(l_1,l_2,l)n(l_1,t)n(l_2,t)\delta(l-l_1-l_2)dl_1dl_2+ \\
&+2\int B(l+\frac{\Delta l}{2}, l_2+\frac{\Delta l}{2}, l_1)n(l_1,t)\times \\
&\quad\times\delta(l_1-\Delta l-l_2-l)dl_1dl_2- \\
&-2\int B(l,l_2,l_1)n(l_1,t)\delta(l_1-l_2-l)dl_1dl_2.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Вычислим $\int l\,(I[n(l,t)] - I_0[n(l,t)])\,dl$:

$$
\begin{aligned}
&\int l\,(I[n(l,t)]-I_0[n(l,t)])\,dl= \\
&=\int (l_1+l_2-\Delta l)A(l_1,l_2,l)n(l_1,t)n(l_2,t)dl_1dl_2- \\
&-\int (l_1+l_2)A(l_1,l_2,l)n(l_1,t)n(l_2,t)dl_1dl_2+ \\
&+2\int lB(l+\frac{\Delta l}{2}, l_1-l-\frac{\Delta l}{2}, l_1)n(l_1,t)dl_1dl- \\
&-2\int lB(l,l_1-l,l_1)n(l_1,t)dl_1dl.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Учитывая равенства (1), имеем:

$$
\begin{aligned}
&\int l\,(I[n(l,t)]-I_0[n(l,t)])\,dl= \\
&=-\Delta l b_m V_l \mathcal{L}^2(t)+2b_s V_l \mathcal{L}(t)\xi_0^{-3/2}\times \\
&\times\left[\int_{\xi_0}^{\infty} l\left(l+\frac{\Delta l}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}dl-\int_{\xi_0}^{\infty} l(l)^{-\frac{3}{2}}dl\right].
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Заметим, что оба интеграла в последнем выражении расходятся на верхнем пределе. В качестве нижнего предела используем параметр обрезания ξ_0 – средний радиус кривизны вихревых нитей. Окончательно для разности (10) имеем:

$$
\begin{aligned}
&\int l\,(I[n(l,t)]-I_0[n(l,t)])\,dl= \\
&=-\Delta l b_m V_l \mathcal{L}^2(t)-2b_s V_l \mathcal{L}(t)\frac{1}{\xi_0}\left[2\frac{\varepsilon+1}{\sqrt{1+\varepsilon/2}}-2\right],
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где $\varepsilon = \Delta l/\xi_0$. Таким образом, умножая уравнение

$$
\frac{\partial n(l,t)}{\partial t} = I[n(l,t)]
$$

на l и интегрируя по l, а также учитывая, что $\int lI_0[n(l,t)]\,dl = 0$, получаем уравнение для $\mathcal{L}(t)$:

$$
\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -\Delta l b_m V_l \mathcal{L}^2(t) - 2b_s V_l \mathcal{L}(t)\frac{1}{\xi_0}\left[2\frac{\varepsilon+1}{\sqrt{1+\varepsilon/2}}-2\right],
$$

которое при $\varepsilon \lesssim 1$ можно, разложив выражение в квадратных скобках в ряд около $\varepsilon = 0$, записать в виде

$$
\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -b_m V_l \Delta l \mathcal{L}^2(t) - \frac{3b_s V_l \Delta l}{\xi_0^2}\mathcal{L}(t),
\tag{13}
$$

где для V_l имеет место оценка $V_l \sim \kappa/\xi_0$. Полученное уравнение определяет закон убывания плотности вихревых нитей за счет излучения при пересоединении. Отметим, что уравнение (13) для первого момента распределения $n(l,t)$, являясь точным для модели (8), не содержит высших моментов при любых значениях параметров Δl, ξ_0, в частности, для высоких плотностей турбулентности. Таким образом, уравнение (13) может описывать быстрые, существенно нестационарные режимы эволюции вихревого клубка, когда распределение вихревых петель по длинам существенно отличается от (4) и соотношение (6) не выполняется. Важно подчеркнуть, что это свойство интеграла столкновений (8) обеспечивается специальным (линейным) видом коэффициентов $A(l_1,l_2,l)$ и $B(l_1,l_2,l)$ и нарушается для других моделей случайного блуждания вихревых нитей [11].

В случае же малых Δl, $1/\xi_0$, когда интеграл столкновений $I[n(l,t)]$ мал и эволюция турбулентного состояния оказывается настолько медленной, что выполняется соотношение (6), можно записать уравнение, описывающее уменьшение плотности вихревых нитей за счет пересоединений в квазистационарном режиме:

$$
\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -\kappa\Delta l\sqrt{\frac{3}{2C_{\mathrm{VLD}}}}\left(b_m + \frac{9b_s}{2C_{\mathrm{VLD}}}\right)\mathcal{L}^{\frac{5}{2}}(t).
$$

Этот результат является ожидаемым, поскольку в [9] было получено выражение для частоты пересоединений в стационарном состоянии (4):

$$\dot{N}_{\mathrm{rec}} = C_{\mathrm{rec}} \kappa \mathcal{L}^{\frac{5}{2}},$$

где C_{rec} – величина порядка 0.1–0.5.

Для обычных плотностей вихревых нитей в жидком гелии $\mathcal{L} \sim 10^9 \mathrm{м}^{-2}$ при длине когерентности $\sim 0.18 \cdot 10^{-9}$ м величину ξ_0 можно оценить как $1/\xi_0 \sim \sim 10^{-5}$. В этом случае коэффициенты при $\mathcal{L}(t)$ и $\mathcal{L}^2(t)$ в уравнении (13) малы по сравнению с C_{Vinen} и рассматриваемый механизм не играет существенной роли в распаде турбулентности.

Численные эксперименты [10] показывают, что излучение фононов при пересоединении приобретает значение лишь при высоких плотностях вихревых нитей, характерных для ранних стадий распада турбулентного состояния в бозе-конденсате. Уравнение (13) позволяет оценить характерное время распада турбулентного состояния в неквазистационарном режиме. Решение задачи Коши для уравнения (13) имеет вид

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\mathcal{L}(0) 3b_s V_l \Delta l/\xi_0^2}{3b_s V_l \Delta l/\xi_0^2 e^{3b_s V_l \Delta l/\xi_0^2 t} + \mathcal{L}(0) b_m V_l \Delta l \left(e^{3b_s V_l \Delta l/\xi_0^2 t} - 1\right)}. \tag{14}$$

При $t \ll \xi_0^2/3b_s V_l \Delta l$ решение имеет характер $\mathcal{L}(t) = = \mathcal{L}(0)/(1 + b_m V_l \Delta l \mathcal{L}(0) t)$, а время убывания величины $\mathcal{L}$ вдвое равно

$$\tau_1 = \frac{\xi_0}{\mathcal{L}(0) b_m \kappa \Delta l} = = \frac{3}{2b_m C_{\mathrm{VLD}}} \frac{\xi_0^3}{\kappa \Delta l} = \frac{\xi_0^3}{\kappa \Delta l} \frac{3}{0.86 b_s} \sim \mathcal{L}(0)^{-3/2} \tag{15}$$

в предположении, что для начального состояния выполнено (6). При больших t ($t \geqslant \xi_0^2/3b_s V_l \Delta l$) величина $\mathcal{L}$ убывает экспоненциально:

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\mathcal{L}(0) 3b_s V_l \Delta l/\xi_0^2}{3b_s V_l \Delta l/\xi_0^2 + b_m V_l \Delta l \mathcal{L}(0)} e^{-3b_s V_l \Delta l/\xi_0^2 t}$$

с характерным временем

$$\tau_2 = \frac{\xi_0^3}{\kappa \Delta l} \frac{1}{3b_s} \sim \mathcal{L}(0)^{-3/2}, \tag{16}$$

таким, что $\tau_1/\tau_2 \sim 10$.

При распаде согласно уравнению Вайнена, время, за которое величина $\mathcal{L}$ уменьшается в два раза, равно

$$\tau = \frac{\xi_0^2}{\kappa} \frac{3}{2C_{\mathrm{VLD}} C_{\mathrm{Vinen}}} \sim \mathcal{L}(0)^{-1}$$

и, в отличие от (15),(16), зависит от начальной средней кривизны нитей не кубично, а квадратично. Таким образом, при достаточно больших плотностях вихревых нитей механизм распада, связанный с излучением фононов при пересоединении, будет превалировать и обеспечивать убывание $\mathcal{L}(t)$ согласно экспоненциальному закону, а не по закону $\mathcal{L}(t) \sim \sim 1/(t+a)$.

Следует отметить, что уравнение (13) никак не связано с классическим уравнением Вайнена; из его вида нельзя сделать выводов о спектре и о режиме турбулентности [13–15]. Кроме того, результаты, полученные с использованием данного подхода, не должны существенно зависеть от режима турбулентности. Действительно, процессы пересоединения, приводящие к образованию фононов, имеют место на всех масштабах турбулентности, поэтому потери длины вихревых нитей не должны сильно зависеть от наличия или отсутствия колмогоровского каскада [15]. Интересно также отметить появление в уравнении распада турбулентности линейного по плотности нитей (энергии турбулентного состояния) члена, характерного для механизмов диссипации, действующих на всех масштабах турбулентного движения [14].

В [13, 15, 18] показано, что для развитой стационарной турбулентности в сверхтекучей жидкости выполнен закон Колмогорова. В этих же работах получено условие, при котором вихревые нити локально поляризованы и имеет место каскад Колмогорова:

$$\mathrm{Re}_s > 1/q^2, \tag{17}$$

где $\mathrm{Re}_s = UR/\kappa$, U и R – характерная скорость и характерный линейный размер крупномасштабного движения жидкости, q – безразмерная постоянная, зависящая от температуры. В данной работе обсуждается случай сильно нестационарного режима распада турбулентности при достаточно малых температурах. Таким образом, нарушается как условие стационарности, так и условие (17) применимости каскада Колмогорова, что дает основания ожидать нарушения закона Колмогорова в рассматриваемой ситуации. Нарушение условия (17) определяет границу применимости изучаемой модели при более высоких температурах и при наличии нормальной компоненты, при его нарушении оправдана модель случайного блуждания вихревых нитей.

Численное моделирование, выполненное в [16], может рассматриваться в качестве иллюстрации к последнему утверждению. Обнаруженное в экспериментах [17] различие масштабов времен формирования и распада решетки вихрей, вероятно, может быть связано с двумя режимами распада: нестационарным, проходящим в основном за счет излучения фононов при пересоединении, и квазистационарным, когда этот эффект мал и турбулентность распадается за счет волн Кельвина согласно уравнению Вайнена. Для выяснения соотношения между этими режимами было бы интересно экспериментально измерить плотность и изучить структуру вихревого клубка на ранних стадиях развития турбулентности, когда величина $\mathcal{L}$ велика. В [17] для сформировавшейся решетки вихрей $\mathcal{L} \sim 1.5 \cdot 10^{10}\,\text{м}^{-2}$ при длине когерентности $\sim 0.2 \cdot 10^{-6}\,\text{м}$, так что $\xi_0 \sim 40$. Используя формулы для τ, τ_1, τ_2 и различие на два порядка времен формирования и распада решетки, можно оценить плотность вихревых нитей, возникающую на некотором этапе развития турбулентности в бозе- конденсате как $\mathcal{L} \sim 10^{12}\,\text{м}^{-2}$.

Было бы также интересно провести численное моделирование процесса распада турбулентного состояния, не удовлетворяющего (6), и изучить зависимость величины

$$\tau_1 = \frac{\xi_0}{\mathcal{L}(0) b_m \kappa \Delta l}$$

как от ξ_0, так и от $\mathcal{L}(0)$.

Автор глубоко благодарен главному научному сотруднику профессору С.К. Немировскому за полезные обсуждения и ценные замечания и Ф.В. Шугаеву за внимание к работе.

1. W. F. Vinen and J. J. Niemela, J. Low Temp. Phys. **516**, 167 (2002).
2. S. L. Davies, P. C. Hendry, and P. V. E. McClintock, Physica B **280**, 43 (2000).
3. D. C. Samuels and C. F. Barenghi, Phys. Rev. Lett. **81**, 4381 (1998).
4. W. F. Vinen, Phys. Rev. B **61**, 1410 (2000).
5. B. V. Svistunov, Phys. Rev. B **52**, 3647 (1995).
6. J. Koplik and H. Levine, Phys. Rev. Lett. **71**, 1375 (1993).
7. E. J. Copeland, T. W. B. Kibble, and D. A. Steer, Phys. Rev. D **58**, 043508 (1998).
8. J. Magueijoa, H. Sandvik, and D. A. Steer, Phys. Rev. D **60**, 103514 (1999).
9. S. K. Nemirovskii, Phys. Rev. Lett. **96**, 015301 (2006).
10. M. Leadbeater, T. Winiecki, D. C. Samuels et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 1410 (2001).
11. S. K. Nemirovskii, `cond-mat/0505441`.
12. D. A. Steer, Ph.D. thesis, University of London, 1997.
13. V. S. L'vov, S. V. Nazarenko, and G. E. Volovik, JETP Lett. **80**, 479 (2004).
14. V. S. L'vov, S. V. Nazarenko, and L. Skrbek, nlin.CD/0606002.
15. A. P. Finne, V. B. Eltsov, R. Hanninen et al., cond-mat/0606619.
16. M. Leadbeater, D. C. Samuels, C. F. Barenghi, and C. S. Adams, Phys. Rev. A **67**, 015601 (2003).
17. J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **88**, 070409 (2002).
18. G. E. Volovik, JETP Lett. **78**, 1021 (2003).