

Механизм коллапса конденсатной волновой функции в бозе-ферми-смеси с притяжением между компонентами

А. М. Белемук, В. Н. Рыжов¹⁾, С. Т. Чуи⁺

Институт физики высоких давлений им. Л.Ф.Вережагина РАН, 142190 Троицк, Московская обл., Россия

⁺Bartol Research Institute, University of Delaware, Newark, DE 19716

Поступила в редакцию 27 июля 2006 г.

На основе эффективного гамильтониана для бозонной подсистемы в смеси вырожденных бозе- и ферми-атомов в ловушке проанализировано основное состояние системы. Численно найдены два типа решений модифицированного уравнения Гросса–Питаевского, реализующие стационарные и неустойчивые состояния бозе-газа. Построены зависимости химического потенциала и энергии от числа бозонов для этих двух типов решений. Проанализирован многозначный характер этих зависимостей и найдено критическое число бозонов, при котором наступает коллапс системы.

PACS: 03.75.Fi, 67.57.Fg, 67.90.Iz

Открытие бозе-эйнштейновской конденсации в экспериментах с парами атомов щелочных металлов, удерживаемых в магнитных ловушках и охлажденных до сверхнизких температур порядка $10^{-6} \sim 10^{-7}$ К [1, 2], дало возможность непосредственно исследовать квантовых статистических свойств вещества, а также открыло новые теоретические направления исследований [3]. Одним из таких направлений является изучение смесей бозе-конденсатов и смеси бозе-газа с ферми-газом.

Разреженные смеси бозонных и фермионных атомов получают, используя охлаждение паров смеси изотопов щелочных атомов в ловушке [4, 5]. Эксперимент позволяет детально исследовать влияние бозон-фермионного взаимодействия на равновесные свойства смеси как в случае взаимного отталкивания, так и притяжения между компонентами смеси. Особый интерес представляет возможность образования фермионных пар и переход ультрахолодного ферми-газа в сверхпроводящее состояние [6–8]. Бозонная компонента используется в таких системах в качестве буфера, взаимодействие с которым позволяет эффективно охлаждать фермионные атомы (sympathetic cooling) в области перекрытия обеих компонент.

Теоретически равновесные свойства бозон-фермионной смеси исследовались в приближении Томаса–Ферми [9], с помощью самосогласованной процедуры решения модифицированного уравнения Гросса–Питаевского (ГП), учитывающей распределение фермионной плотности [10], на основе численных расчетов, использующих метод детерминантов

Слэтера [11]. Исследовались также динамические свойства смеси в рамках приближения хаотических фаз [12, 13] и свойства вихревого состояния [14].

Было установлено, что отталкивание компонент может привести к пространственному разделению бозонной и фермионной компонент [10, 11, 15], причем выталкиваться на периферию может как бозонная, так и фермионная компонента. В случае притяжения между компонентами состояние смеси становится нестабильным относительно коллапса, когда энергия эффективного притяжения между бозонами становится больше кинетической энергии и энергии отталкивательного взаимодействия бозонных атомов друг с другом. Коллапс экспериментально наблюдался в смеси ^{40}K – ^{87}Rb [5]. Было обнаружено, что существует некоторое критическое число бозонных атомов N_{cr} , при котором начинает происходить коллапс бозонного и фермионного облака.

В настоящей работе мы исследуем нестабильность бозон-фермионной системы и условия возникновения коллапса на основе эффективного гамильтониана для бозонной подсистемы [16, 17]. Ранее [18] анализ проводился в рамках приближения Томаса–Ферми и на основе вариационной бозонной волновой функции. В настоящей работе мы построим численные решения модифицированного уравнения ГП, что позволяет непосредственно исследовать эволюцию бозонного распределения в сторону коллапса.

При выводе эффективного бозонного гамильтониана [16, 17] используется представление статсуммы большого канонического распределения для бозе-ферми-смеси в виде функционального интеграла [19, 20]

¹⁾e-mail: ryzhov@hppi.troitsk.ru

$$Z = \int D[\phi^*]D[\phi]D[\psi^*]D[\psi] \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar}(S_B(\phi^*, \phi) + S_F(\psi^*, \psi) + S_{int}(\phi^*, \phi, \psi^*, \psi)) \right\}. \quad (1)$$

Интегрирование проводится по бозонным и фермионным полям $\phi(\tau, \mathbf{r})$ и $\psi(\tau, \mathbf{r})$, описывающим соответственно бозе- и ферми-компоненту смеси. Действие для бозе-газа имеет вид

$$S_B(\phi^*, \phi) = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{r} \left\{ \phi^*(\tau, \mathbf{r}) \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_B} + V_B(\mathbf{r}) - \mu_B \right) \phi(\tau, \mathbf{r}) + \frac{g_B}{2} |\phi(\tau, \mathbf{r})|^4 \right\}. \quad (2)$$

Действие для ферми-газа атомов, находящихся в одном и том же спиновом состоянии, что запрещает взаимное s -рассеяние ферми-атомов, имеет такой же вид, как и для невзаимодействующего ферми-газа:

$$S_F(\psi^*, \psi) = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{r} \left\{ \psi^*(\tau, \mathbf{r}) \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_F} + V_F(\mathbf{r}) - \mu_F \right) \psi(\tau, \mathbf{r}) \right\}. \quad (3)$$

Слагаемое, описывающее взаимодействие между компонентами бозе-ферми-смеси имеет вид

$$S_{int}(\phi^*, \phi, \psi^*, \psi) = g_{BF} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{r} |\psi(\tau, \mathbf{r})|^2 |\phi(\tau, \mathbf{r})|^2, \quad (4)$$

где $g_B = 4\pi\hbar^2 a_B/m_B$ и $g_{BF} = 2\pi\hbar^2 a_{BF}/m_I$, $m_I = m_B m_F / (m_B + m_F)$, a_B и a_{BF} – амплитуды s -рассеяния при бозон-бозонном и бозон-фермионном рассеяниях.

Параметры μ_B и μ_F задают соответственно химический потенциал бозонной и фермионной подсистем. Химический потенциал идеального ферми-газа в ловушке зависит от числа фермионов как $\mu_F = \hbar\omega_F (6\lambda N_F)^{1/3}$ [21]. Атомы находятся во внешнем потенциале изотропной гармонической ловушки:

$$V_B(\mathbf{r}) = \frac{m_B \omega_B^2}{2} r^2, \quad V_F(\mathbf{r}) = \frac{m_F \omega_F^2}{2} r^2,$$

где m_B и m_F – соответственно массы бозонных и фермионных атомов. Параметры потенциала ловушки ω_B и ω_F подобраны так, что $m_B \omega_B^2/2 = m_F \omega_F^2/2$, следовательно, $\omega_F = \sqrt{m_B/m_F} \omega_B$.

Интегрирование по ферми-полям позволяет ввести эффективный функционал энергии подсистемы бозонов, содержащий только конденсатную волновую функцию подсистемы бозонов $\phi(\mathbf{r})$ [16, 17]:

$$H_{\text{eff}}[\phi] = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m_B} |\nabla\phi|^2 + (V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) - \mu_B) |\phi|^2 + \frac{g_{\text{eff}}}{2} |\phi|^4 + \frac{g_{\text{eff}}^{BF}}{3} |\phi|^6 \right\}, \quad V_{\text{eff}} = k_0 \frac{m_B \omega_B^2}{2} r^2, \quad (5)$$

где

$$k_0 = \left(1 - \frac{3}{2} \kappa \mu_F^{1/2} g_{BF} \right), \quad g_{\text{eff}} = g_B - \frac{3}{2} \kappa \mu_F^{1/2} g_{BF}^2, \quad (6)$$

$$g_{\text{eff}}^{BF} = \frac{3\kappa}{8\mu_F^{1/2}} g_{BF}^3, \quad \kappa = \frac{\sqrt{2} m_F^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}.$$

Волновая функция $\phi(\mathbf{r})$ нормирована на число атомов в конденсате $\int |\phi(\mathbf{r})|^2 d^3r = N$. Мы рассматриваем предел $T \rightarrow 0$, поэтому N практически совпадает с полным числом атомов в ловушке.

Первые три слагаемых функционала $H_{\text{eff}}[\phi]$ имеют обычный вид гамильтониана Гросса–Питаевского. Взаимодействие с фермионной подсистемой приводит к изменению частоты потенциала ловушки, а также ослаблению бозон-бозонного отталкивания. При бозон-фермионном притяжении бозонные атомы должны вести себя так, как если бы находились в удерживающем потенциале с несколько большей частотой. Последнее слагаемое отвечает трехчастичным упругим столкновениям, вызванным бозон-фермионным взаимодействием. В отличие от неупругих трехчастичных столкновений, которые ведут к рекомбинации и вылету быстрых частиц из системы [22], это слагаемое при $g_{BF} < 0$ ведет к увеличению плотности конденсата в центре ловушки. Положительная кинетическая энергия и энергия отталкивания бозонов стабилизируют систему. Однако если плотность в центре ловушки становится слишком большой, то кинетическая энергия и энергия отталкивания бозонов не могут больше компенсировать отрицательное притяжение, и происходит коллапс газа. Как и в случае бозе-газа с притяжением, коллапс в смеси происходит, когда число частиц в конденсате превысит некоторое критическое значение N_{cr} .

Выбирая в качестве единиц длины и энергии параметры гармонического потенциала ловушки $a_{\perp} = \sqrt{\hbar m_B / \omega_B}$ и $\hbar\omega_B$ и перемасштабируя пространственные координаты, энергию и волновую функцию $\mathbf{r} = a_{\perp} \mathbf{r}'$, $E = \hbar\omega_B E'$, $\phi(\mathbf{r}) = \sqrt{1/a_{\perp}^3} \phi'(\mathbf{r}')$, записываем эффективный гамильтониан в безразмерном виде (штрихи опускаем):

$$H_{\text{eff}} = \int \left\{ \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + \left(k_0 \frac{r^2}{2} - \mu_B \right) |\phi|^2 + \frac{u}{4} |\phi|^4 + \frac{v}{6} |\phi|^6 \right\} d^3r, \quad (7)$$

где мы ввели безразмерные параметры $u = 2g_{\text{eff}}/a_{\perp}^3 \hbar\omega_{\perp}$ и $v = 2g_{\text{eff}}^{BF}/a_{\perp}^6 \hbar\omega_{\perp}$.

Варьирование этого функционала $\delta H_{\text{eff}}/\delta\phi^* = 0$ приводит к модифицированному уравнению ГП:

$$\left(-\frac{\nabla^2}{2} + k_0 \frac{r^2}{2} - \mu_B + \frac{u}{2}|\phi|^2 + \frac{v}{2}|\phi|^4\right)\phi = 0. \quad (8)$$

Конкретно для смеси ^{87}Rb и ^{40}K мы используем следующие значения параметров [5]: $a_B = 5.25$ нм, $a_{BF} = -19.4$ нм, $N_F \approx 2 \cdot 10^4$, $\omega_B = 2\pi \cdot 215$ Гц. При таких значениях параметров характерная ширина распределения конденсата $a_{\perp} = 735$ нм, химический потенциал фермионов $\mu_F \approx 31 \hbar\omega_B$, $\omega_F \approx 1.47 \omega_B$, $k_0 = 1.07$, $u = 0.11$, $v = -0.0003$. Ввиду малого отличия k_0 от единицы мы далее будем считать, что $k_0 = 1$. Отметим также, что мы ищем действительные решения уравнения (8), отвечающие основному состоянию. Итак, приходим к уравнению ($\mu \equiv \mu_B$)

$$\Delta\phi = (r^2 - 2\mu + u\phi^2 + v\phi^4)\phi. \quad (9)$$

Аналогичное уравнение, но в контексте стабилизации бозе-газа с притяжением ($u < 0$) за счет трехчастичных столкновений ($v > 0$) рассматривалось в работе [23].

Рассмотрим вначале аналитическое решение уравнения (9) в приближении Томаса–Ферми (ТФ), когда членом с кинетической энергией можно пренебречь. Профиль плотности имеет вид

$$\phi_{TF}^2(r) = n_{cr} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{R^2 - r^2}{R_{cr}^2}} \right], \quad R^2 = 2\mu,$$

$$R_{cr}^2 = \frac{u^2}{4|v|}, \quad n_{cr} = \frac{u}{2|v|}, \quad R \leq R_{cr},$$

где решение рассматривается на отрезке $0 \leq r \leq R$.

Удобно параметризовать решения величиной центральной плотности $n_c = \phi^2(0)$, перемасштабированной множителем u , то есть параметром $u_0 \equiv un_c$. Вводим также $v_0 \equiv vn_c^2$. В приближении ТФ эти параметры связаны с химическим потенциалом простым соотношением $2\mu_{TF} = u_0 + v_0$. Выражая параметры томас-фермиевского приближения через u_0 и v_0 , легко увидеть, что при фиксированном значении $|v|/u^2$ отношение R^2/R_{cr}^2 как функция u_0

$$\frac{R^2}{R_{cr}^2} = \frac{u_0 \left(1 - \frac{|v|}{u^2} u_0\right)}{\frac{u^2}{4|v|}}$$

имеет вид перевернутой параболы, положительное значение которой лежит в интервале $0 < u_0 < u^2/|v|$.

При $u_{0cr} = u^2/2|v|$ отношение R^2/R_{cr}^2 достигает максимального значения, равного единице. В этом случае томас-фермиевское решение вырождается в линейную зависимость $\phi_{TF}(r) = n_{cr}(1 - r)$, $r < R_{cr}$, с максимальным значением плотности в центре ловушки $n_c = n_{cr}$. По наступившему критическому режиму определялось критическое число бозонов N_{cr} [18]. Отметим, что существуют два значения параметра u_0 из интервала $0 < u_0 < u^2/|v|$, симметрично расположенные относительно u_{0cr} и отвечающие одному и тому же решению $\phi_{TF}(r)$. Для выбранных параметров задачи $u_{0cr} \approx 16.7$.

На рис.1 показан типичный профиль волновой функции конденсата в приближении ТФ. Видно, что

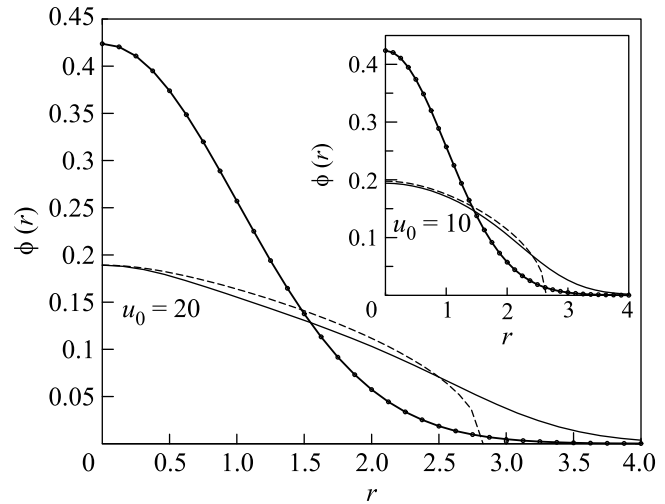


Рис.1. Волновая функция бозе-конденсата (нормированная на 1), полученная на основе численного решения (сплошная линия), и аналитическое решение в приближении ТФ (штриховая линия) для параметра $u_0 = 20$ (на вставке для $u_0 = 10$). Для сравнения показано основное состояние изотропного гармонического осциллятора $\phi_{ho}(r)$, отвечающее бозе-газу без взаимодействия ($u = 0$, $v = 0$) (линия с кружком). Расстояние r приведено в единицах a_{\perp}

приближение ТФ хорошо работает в области значений параметра $u_0 = 10 \sim 20$, относительно близких к u_{0cr} . Для сравнения показано также решение для изотропного гармонического осциллятора $\phi_{ho}(r) = \pi^{-3/4} \exp(-r^2/2)$, которое отвечает основному состоянию невзаимодействующего бозе-газа ($u = 0$, $v = 0$). Отметим, что все волновые функции, которые будут представлены на рисунках, нормированы на единицу.

Численные решения уравнения (9) зависят параметрически от u_0 и v_0 . Поскольку $v_0 = (v/u^2)u_0^2$, то при фиксированном (v/u^2) решение зависит только

от одного параметра u_0 , то есть от величины центральной плотности. Химический потенциал, который определяется из условия $\phi(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$, также будет зависеть от u_0 как от параметра: $\mu = \mu(u_0)$. После определения $\phi(r)$ находим из условия нормировки число частиц $N(u_0)$ и из явного вида функционала (7) эффективную энергию основного состояния $E_{\text{eff}}(u_0)$ и значение энергии $E(u_0) = E_{\text{eff}} + \mu N$. С термодинамической точки зрения E_{eff} совпадает при $T = 0$ с Ω -потенциалом системы, а соответственно, E со свободной энергией $F = \Omega + \mu N$.

На рис.2 показана эволюция профиля конденсата при увеличении центральной плотности. При $u_0 \lesssim 20$ наблюдается поведение, характерное для бозе-газа

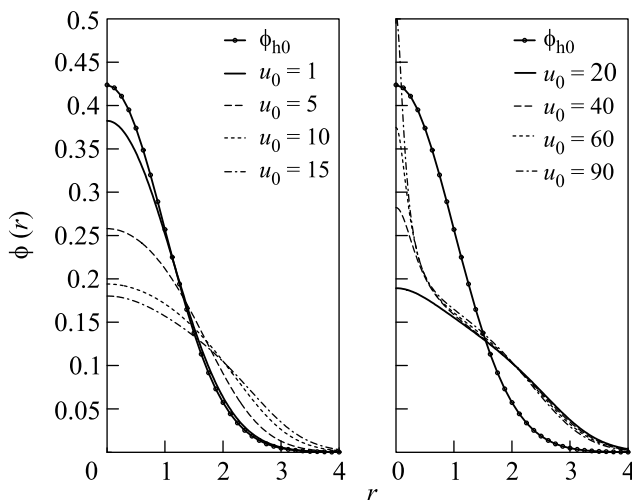


Рис.2. Эволюция профиля конденсатной волновой функции основного состояния при увеличении параметра u_0 . Линия с кружком отвечает бозе-газу без взаимодействия

с отталкиванием – постепенное увеличение размеров конденсатного облака. Плотность облака становится все более плоской в центре ловушки, приближаясь к аналитическому решению ТФ. При $u_0 \gtrsim 20$ тип решения качественно меняется – начинается рост центральной плотности.

Анализ картины коллапса в бозе-конденсате с притяжением [22, 24] показывает, что при $N < N_{cr}$ существует два многочастичных состояния с одним и тем же числом частиц N и энергией E . Первое состояние описывает метастабильное состояние конденсата в ловушке и имеет пространственные размеры $\sim a_{\perp}$. Второе состояние является нестационарным состоянием, локализованным в намного меньшей области. Это то состояние, через которое происходит коллапс газа. Эти два состояния разделены энергетическим барьером, амплитуда перехода через который

экспоненциально зависит от $(N - N_{cr})$. При приближении N к критическому значению N_{cr} барьер исчезает, возникает неустойчивость, отвечающая наличию возбуждений с нулевой энергией. Построенное семейство решений $\phi_{u_0}(r)$ полностью соответствует описанной картине поведения. При $u_0 \lesssim 5$ распределение плотности близко к распределению плотности основного состояния гармонического осциллятора с характерным пространственным размером порядка $\sim a_{\perp}$. При $10 \lesssim u_0 \lesssim 23$ конденсат имеет наибольшие пространственные размеры $\sim 3a_{\perp}$. При $u_0 > 23$ наблюдается существенный рост центральной плотности в малой области около центра ловушки $r \ll a_{\perp}$. Решения с $u_0 > 23$ мы связываем с нестационарными состояниями конденсата, через которые осуществляется коллапс волновой функции.

На рис.3 представлены графики эволюции химического потенциала μ , числа частиц N , эффективной энергии E_{eff} и энергии E в зависимости от параметра u_0 . Наибольшего значения μ и N достигают при $u_0 = 23$. В этой точке наблюдается также и экстремум функций $E_{\text{eff}}(u_0)$ и $E(u_0)$, при котором состояние конденсата становится неустойчивым. Известно, что достаточным условием наличия нулевой моды возбуждений служит наличие экстремума свободной энергии $\partial F / \partial n_c = 0$, рассматриваемой как функция плотности конденсата в центре ловушки n_c [25]. При выполнении этого условия не требуется энергии, чтобы непрерывно продеформировать один профиль плотности в другой, что означает существование нулевой моды флуктуаций плотности и ведет к неустойчивости системы. Все решения с $u_0 > 23$ являются состояниями, отвечающими неустойчивому состоянию системы и ведут к коллапсу волновой функции конденсата.

На рис.4 показаны зависимости от числа частиц химического потенциала $\mu(N)$, энергии конденсата $E(N)$ и эффективной энергии $E_{\text{eff}}(N)$ и зависимость эффективной энергии от химического потенциала $E_{\text{eff}}(\mu)$. Можно проверить, что производная $\partial E / \partial N$ совпадает с μ , а $\partial E_{\text{eff}} / \partial \mu = -N$. Поэтому расчет является согласованным. Видно, что существует два состояния конденсата, отвечающие одному и тому же числу частиц, имеющие одинаковый химический потенциал и энергию. Первое (маркер – звездочка) соответствует устойчивому (метастабильному) состоянию и отвечает той части кривых $\mu(u_0)$, $E(u_0)$ и $E_{\text{eff}}(u_0)$, которые лежат на интервале $0 < u_0 < 23$. Начало этой ветви состояний выходит из области малых u_0 , т.е. той области, где система заведомо устойчива (разреженный слабонепригодный бозе-газ с отталкиванием). Второе состоя-

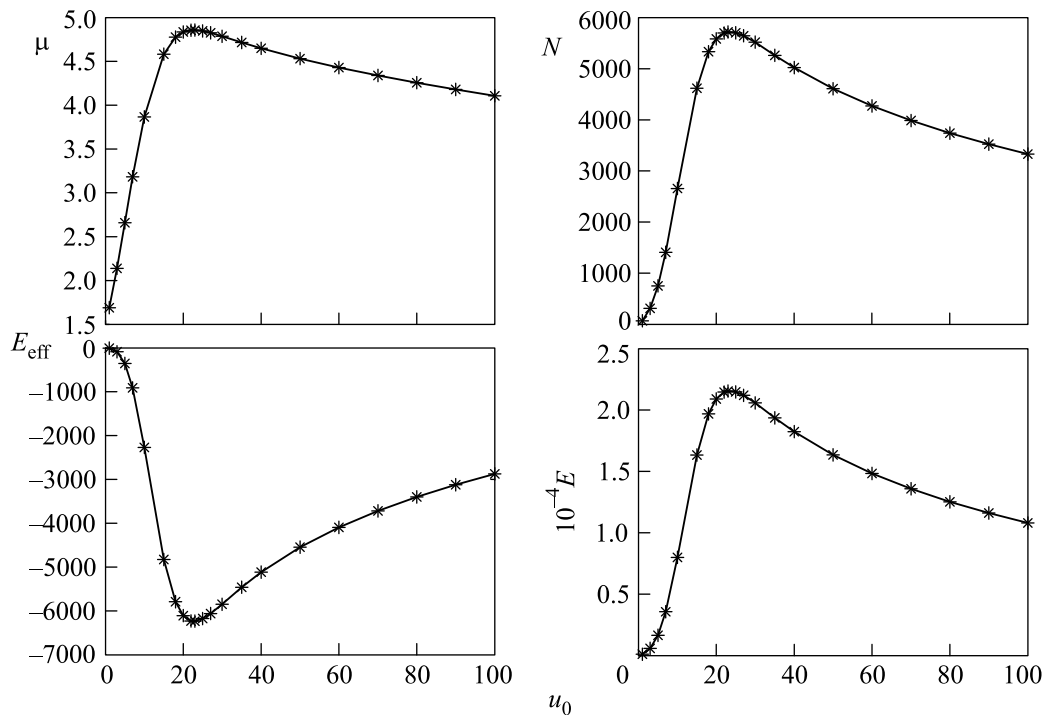


Рис.3. Зависимости химического потенциала μ , числа частиц N , эффективной энергии E_{eff} и энергии $E = E_{\text{eff}} + \mu N$ основного состояния от параметра u_0 (все функции приведены в единицах $\hbar\omega_B$)

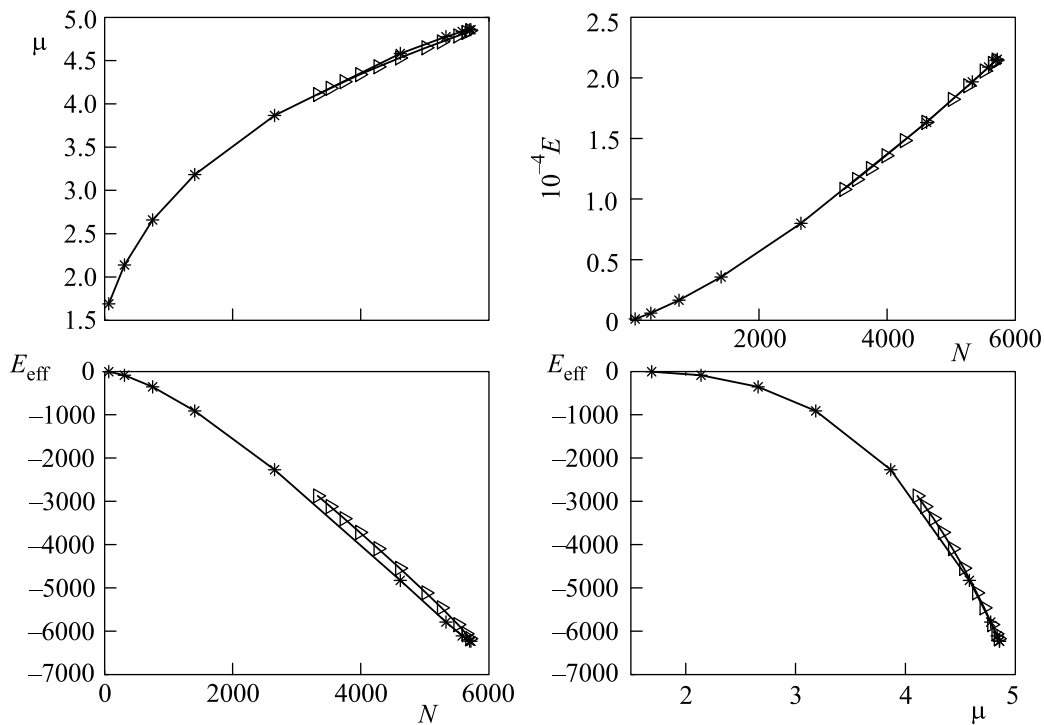


Рис.4. Зависимость химического потенциала μ , энергии E , эффективной энергии E_{eff} от числа частиц N и зависимость эффективной энергии E_{eff} от химического потенциала. Кривая со звездочкой соответствует устойчивым состояниям бозе-конденсата ($u_0 < 23$). Кривая с треугольником соответствует нестационарным состояниям, ведущим к коллапсу бозе-конденсата ($u_0 > 23$)

ние (маркер – треугольник) описывает нестационарное состояние, ведущее к коллапсу, и отвечает тем

частям кривых $\mu(u_0)$, $E(u_0)$ и $E_{\text{eff}}(u_0)$, которые лежат при $u_0 > 23$. Начало второй ветви состояний на-

ходится в точке неустойчивости системы. По физическому смыслу состояния, соответствующие резкому росту плотности частиц в центре ловушки, описывают состояние системы, ведущее к коллапсу. Отметим, что имеется небольшое отличие в эффективных энергиях построенных двух ветвей состояний, которое стремится к нулю при приближении N к N_{cr} .

Кривые $\mu(N)$, $E(N)$ и $E_{\text{eff}}(N)$ имеют точку окончания, соответствующую наибольшему числу бозонов $N_{cr} \sim 6000$. Для сопоставления с экспериментом следует учесть асимметричность магнитной ловушки. Параметр частоты потенциала ловушки вдоль оси z есть $\omega_{B,z} = \lambda\omega_B = 2\pi \cdot 16.3$ Гц. Поэтому найденное критическое число бозонов следует домножить на фактор $\sim 1/\lambda \approx 13.2$, что дает $N_{cr} \sim 10^5$ в хорошем согласии с экспериментом [5].

В заключение отметим, что мы провели численный анализ модифицированного уравнения ГП, решения которого описывают состояния конденсатной волновой функции бозонной подсистемы в смеси бозе-и ферми-газов. Обнаружены два режима поведения, соответствующие стационарному (метастабильному) и неустойчивому (коллапсирующему) состояниям бозе-системы. Найденные зависимости химического потенциала, числа бозонов, эффективной энергии и энергии как функции центральной плотности n_c (или u_0) демонстрируют наличие точки экстремума и, как следствие, многозначности функций $\mu(N)$, $E(N)$ и $E_{\text{eff}}(N)$. Функции $\mu(N)$, $E(N)$ и $E_{\text{eff}}(N)$ имеют точку окончания, соответствующую критическому числу бозонов, при котором наступает коллапс системы. Найденное критическое число бозонов демонстрирует хорошее согласие с экспериментом.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты # 04-02-17367 и # 05-02-17621) и Фонда содействия отечественной науке.

-
1. M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews et al., *Science* **269**, 198 (1995).
 2. C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollet, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).

3. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
4. F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080403 (2001).
5. G. Modugno, G. Roati, F. Riboli et al., *Science* **297**, 2240 (2002).
6. C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, *Nature* **424**, 47 (2003).
7. M. Greiner, C. A. Regal, and D. S. Jin, *Nature* **426**, 537 (2003).
8. S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer et al., *Science* **302**, 2101 (2003).
9. K. Molmer, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1804 (1998).
10. R. Roth, *Phys. Rev. A* **66**, 013614 (2002).
11. N. Nygaard and K. Molmer, *Phys. Rev. A* **59**, 2974 (1999).
12. P. Capuzzi, A. Minguzzi, and M. P. Tosi, *Phys. Rev. A* **68**, 033605 (2003).
13. A. Sinatra and Y. Castin, *Eur. Phys. J. D* **8**, 319 (2000).
14. D. M. Jezek, M. Barranco, M. Guilleumas et al., *Phys. Rev. A* **70**, 043630 (2004).
15. X. X. Yi and C. P. Sun, *Phys. Rev. A* **64**, 043608 (2001).
16. S. T. Chui and V. N. Ryzhov, *Phys. Rev. A* **69**, 043607 (2004).
17. S. T. Chui, V. N. Ryzhov, and E. E. Tareyeva, *JETP Lettes* **80**, 274 (2004).
18. A. M. Belemuk, N. M. Chtchelkatchev, V. N. Ryzhov, and S. T. Chui, *Phys. Rev. A* **73**, 053608 (2006).
19. V. N. Popov, *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics*, Reidel, Dordrecht, 1983.
20. H. T. C. Stoof, in *Coherent Atomic Matter Waves*, Proc. of the Les Houches Summer School Session LXXII, UJF NATO Advanced Study Institute, 1999, Eds. R. Kaiser, C. Westbrook, and F. David, EDP Sciences, Springer-Verlag, 2001, pp. 219-316.
21. D. A. Butts and D. S. Rokhsar, *Phys. Rev. A* **55**, 4346 (1997).
22. Yu. Kagan, A. E. Muryshev, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 933 (1998).
23. N. Akhmediev, M. P. Das, and A. V. Vagov, *Aust. J. Phys.* **53**, 157 (2000).
24. Yu. Kagan, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2670 (1996).
25. M. Houbiers and H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. A* **54**, 5055 (1996).