

О спектре глюоболов в модели Клебана–Штрасслера

А. Я. Дымарский^{+△*1}), Д. Г. Мельников^{+*®1})

⁺ Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 119899 Москва, Россия

[△] Принстонский университет, Принстон, 08544 Нью Джерси, США

^{*} Институт теоретической и экспериментальной физики, 117259 Москва, Россия

[®] Государственный университет Нью Джерси Ратгерс, 08854-8019 Нью Джерси, США

Поступила в редакцию 26 июня 2006 г.

После переработки 4 сентября 2006 г.

Исследование спектра линеаризованных уравнений ПИВ теории супергравитации над фоновым решением Клебана–Штрасслера. Показано, что спектр скалярной частицы, минимально взаимодействующей с фоном, вырожден со спектром гравитона – бесследовой моды спина два и детально изучен этот спектр. Результаты обобщаются на более общий случай решения, известного в литературе как *барионная ветвь*.

PACS: 11.25.Tq, 12.60.Jv

Суперсимметричным теориям поля в современной физике уделяется большое значение. Вне зависимости от того, оправдаются ли ожидания найти подтверждение суперсимметричности стандартной модели, суперсимметричные теории заслужили внимание физиков прежде всего за то, что они являются простыми моделями, позволяющими качественно объяснить механизмы сложных физических явлений.

В частности, на суперсимметрию возлагаются большие надежды и в объяснении механизма конфайнмента. Простейшей суперсимметричной теорией, качественно близкой к квантовой хромодинамике (КХД), является $\mathcal{N} = 1$ калибровочная теория Янга–Миллса. Эта теория содержит калибровочное поле и глюино-бесмассовый фермион в присоединенном представлении калибровочной группы $SU(N)$.

Аналогично бесмассовой КХД, эта теория обладает киральной $U(1)$ -симметрией, которая на квантовом уровне нарушается инстантонами до \mathbb{Z}_{2N} -подгруппы. В суперсимметричном случае киральная $U(1)_R$ -аномалия объединяется в один мультиплет с аномалиями масштабной и суперконформной симметрий [1]. Дивергенция супертока принимает следующий вид в суперполевои записи:

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} \mathcal{J}_{\alpha\dot{\alpha}} = D_{\alpha} S, \quad (1)$$

где $\mathcal{J}_{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \mathcal{J}_{\mu}$ – мультиплет $U(1)$ токов, а S – суперполе, чьими компонентами являются аномальные члены

$$S = \lambda\lambda + \theta^{\alpha} \sigma_{\alpha}^{\mu\nu\beta} \lambda_{\beta} F_{\mu\nu} + \theta\theta(F^2 + F\bar{F} + \dots). \quad (2)$$

Низкоэнергетическое эффективное действие для этой теории было предложено Венециано и Янкиеловичем [2] в начале восьмидесятых:

$$\int d^4x d^2\theta NS(\log \frac{S}{\Lambda^3} - 1). \quad (3)$$

Здесь роль низкоэнергетической степени свободы играет суперполе S из (1). Как легко убедиться, данное действие не обладает $U(1)_R$ -симметрией. В то же время \mathbb{Z}_{2N} -преобразование сдвигает действие на целый множитель 2π , что является симметрией квантовой теории.

Действие (3) обладает N вакуумами, вращаемыми \mathbb{Z}_{2N} -группой:

$$\langle S \rangle = e^{2\pi i k/N} \Lambda^3, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4)$$

Аналогично КХД, киральная симметрия нарушается вакуумным средним квадрата глюонных полей S . Подобное сходство с КХД дает основания рассматривать $\mathcal{N} = 1$ теорию Янга–Миллса как приемлемую модель для описания определенных процессов в КХД.

Число степеней свободы в низкоэнергетической теории определяется числом степеней свободы кирального $\mathcal{N} = 1$ суперполя. Последнее содержит комплексное скалярное поле и 2-компонентный вейлевский спинор на массовой поверхности. Однако, со-

¹) e-mail: dymarsky@princeton.edu, melnikov@physics.rutgers.edu

гласно результатам исследования эффективной $\mathcal{N} = 1$ теории Янга–Миллса на решетке [3], низкоэнергетическая теория обладает в два раза большим числом степеней свободы.

Кроме того, глобол-оператор $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ в теории Венециано и Янкиеловича выступает как вспомогательное поле и имеет тривиальную динамику. Этот факт противоречит нашему опыту из КХД, где этот оператор приобретает нетривиальное вакуумное среднее.

В разное время были проведены попытки модифицировать и обобщить результат Венециано и Янкиеловича методами теории поля [4], или $\mathcal{N} = 2$ методами [5]. Однако результаты этих попыток также не согласуются с предсказаниями вычислений на решетке. Сравнительно недавно появилась возможность получать информацию о калибровочной теории в режиме сильной связи из классических и пертурбативных вычислений в супергравитации, используя принцип AdS/CFT соответствия [6, 7]. Обобщение этого принципа на случай $\mathcal{N} = 1$ калибровочной теории проведено в работе Клебанова и Штрасслера [8].

В работе [8] находится классическое решение в теории супергравитации типа IIB, соответствующая N $D3$ -бранам и M дробным $D5$ -бранам, помещенным на вершину деформированного конифолда – 6-мерного многообразия Калаби–Яу с известной риччи-плоской метрикой [9]. Решение также содержит ненулевой поток 3-формы F_3 через 3-цикл конифолда. Теория на таком классическом фоне дуальна $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(N+M) \times SU(N)$ на мировом объеме $D3$ -бран в режиме сильной связи. В частности, линеаризованные возмущения, возникающие на фоне решения Клебанова–Штрасслера (КШ), соответствуют глоболам в калибровочной теории. Так, скалярное возмущение 0^{++} соответствует оператору $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

Данное письмо посвящено исследованию спектра простейшего скалярного уравнения на фоне решения КШ, а также его обобщения, известного в литературе под названием *барионная ветвь* [10]. Мы надеемся, что информация о спектре низколежащих скалярных возмущений в модели КШ позволит сделать выводы о структуре низкоэнергетической теории, обобщающей (3).

Наиболее простым для изучения скалярным уравнением является безмассовое уравнение Клейна–Гордона, описывающее скалярную частицу, взаимодействующую с гравитационным полем в отсутствие потенциала:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi) = 0. \quad (5)$$

Мы хотим показать, что это уравнение определяет спектр частиц в поле конфигурации КШ, а также на барионной ветви. Согласно [11], в случае пространства AdS, такому уравнению подчиняются компоненты гравитона-бесследового, симметричного возмущения метрики.

Уравнение Эйнштейна в IIB теории супергравитации имеет вид [12]

$$R_{ij} = -4\partial_i\Phi\partial_j\Phi + \frac{g_s^2}{96}e^{2\Phi}F_{iabcd}F_j^{abcd} + \frac{1}{4}H_{iab}H_j^{ab} - \frac{1}{48}g_{ij}H_{abc}H^{abc} + \frac{g_s^2}{4}e^{2\Phi}F_{iab}F_j^{ab} - \frac{g_s^2}{48}e^{2\Phi}g_{ij}F_{abc}F^{abc}, \quad (6)$$

где мы положили аксион C равным нулю. Пусть \bar{g}_{ij} обозначает метрику фонового решения:

$$g_{ij} = \bar{g}_{ij} + h_{ij}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и оставляя члены, линейные по возмущению h_{ij} , получаем:

$$\frac{1}{2}(-h_{ij;c}^c - h_c^c{}_{;ij} + h_{jci}{}^c + h_{ic;j}{}^c) = \left(\frac{g_s^2}{96}\frac{1}{5}F_5^2 - \frac{1}{48}H_3^2 - \frac{g_s^2}{48}F_3^2\right)h_{ij} \quad (8)$$

для $i \neq j$. Поскольку внедиагональные компоненты метрики не меняют детерминанта $\det g_{ij}$ в лидирующем порядке, нет необходимости возмущать остальные уравнения супергравитации. Кроме того, как следует из (8), компоненты гравитона не взаимодействуют с другими возмущениями метрики. Иными словами, гравитон является собственным вектором системы линеаризованных уравнений.

Мы будем производить вычисления с выражением для фоновой метрики, записанным в струнном представлении²⁾, в наиболее общем виде, совместном с фоновой геометрией [10, 13]:

$$ds^2 = e^{2A(\tau)}dx^\mu dx^\mu + e^{-6p(\tau)-x(\tau)}d\tau^2 + ds_5^2, \quad (9)$$

где τ – радиальная координата на деформированном конифолде. Функции $A(\tau)$, $p(\tau)$, $x(\tau)$ – некоторые функции, явно известные в случае КШ и удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений первого порядка на барионной ветви [10].

²⁾Напомним, что струнное представление соответствует множителю $e^{-2\Phi}$ перед скалярной кривизной R в действии, в отличие от стандартного эйнштейновского представления.

В системе покоя частицы $h_{ij} = h_{ij}(\tau)e^{-m\tau^4}$, мы получаем следующее уравнение для $i \neq j$:

$$e^{6p+x+\frac{1}{2}\Phi} (\ddot{h}_{ij} + (2\dot{x} - \dot{\Phi})\dot{h}_{ij} + m^2 e^{-2A-6p-x} h_{ij} + (2\dot{A} - \frac{1}{2}\dot{\Phi})^2 h_{ij}) = - \left(\frac{g_s^2}{48} \frac{1}{5} F_5^2 - \frac{1}{24} H_3^2 - \frac{g_s^2}{24} F_3^2 \right) h_{ij}, \quad (10)$$

где точки означают дифференцирование по τ . Подставляя выражения для форм через функции решения [10] и переопределяя $h_{ij} \rightarrow e^{2A-1/2\Phi} h_{ij}$, чтобы выделить четырехмерную волновую функцию гравитона, получаем уравнение

$$\ddot{h}_{ij} + 2(\dot{x} - \dot{\Phi} + 2\dot{A})\dot{h}_{ij} + m^2 e^{-2A-6p-x} h_{ij} = 0, \quad (11)$$

которое в точности совпадает с уравнением минимального скаляра (5) в метрике (9), взятой в представлении Эйнштейна. Таким образом, гравитон в действительности описывается уравнением Клейна-Гордона (5).

В случае решения КШ функции из анзаца (9) принимают вид [8, 10]

$$e^{2x} = \frac{(\sinh \tau \cosh \tau - \tau)^{2/3}}{16} h, \\ e^{6p+2x} = \frac{3}{2} (\coth \tau - \tau \operatorname{csch}^2 \tau), \\ h = \int_{\tau}^{\infty} dx \frac{(x \coth x - 1)(\sinh 2x - 2x)^{1/3}}{\sinh^2 x}, \quad (12)$$

где $h(\tau) = e^{-4A}$ – “фактор искажения” метрики за счет наличия ненулевого значения потока рамоновской 3-формы F_3 . Подставляя явные выражения, мы получаем следующее:

$$\ddot{\varphi} + \frac{8}{3} \frac{\sinh^2 \tau}{\sinh 2\tau - 2\tau} \dot{\varphi} + \frac{m^2}{6} \frac{h(\tau) \sinh^2 \tau}{(\sinh 2\tau - 2\tau)^{2/3}} \varphi = 0. \quad (13)$$

Спектр уравнения (13) изучался в работах [14] и [15]. В работе [14] спектр собственных значений был найден квазиклассическим методом. В работе [15] были найдены отдельные собственные значения для скаляра и гравитона, однако факт вырожденности двух спектров отмечен не был. Ниже мы поместили таблицу низших собственных значений, которые были рассчитаны методом ВКБ, а также численно, методом пристрелки (см., например, [16]). Первый метод хорошо работает для больших квантовых чисел, в то время как второй метод применим, вообще говоря, для легких возбуждений, для которых результаты метода пристрелки более надежны.

Представленные в таблице числа соответствуют значениям квадрата массы. Как можно видеть, результаты двух методов находятся в хорошем согласии друг с другом.

n	1	2	3	4	5	6
ВКБ	1.79	4.03	7.16	11.2	16.2	22.0
Пристрелка	1.76	3.99	7.13	11.2	16.1	22.0

Если поинтересоваться собственно спектром масс, то можно заметить, что собственные значения хорошо описываются линейной формулой

$$m = 0.637(n + 0.966), \quad (14)$$

то есть являются эквидистантными с хорошей точностью. Это справедливо для функций Бесселя, которые являются собственными функциями оператора Лапласа на конусе. Несмотря на то, что здесь мы имеем дело с деформированным конифолдом, функции Бесселя по-прежнему являются хорошим приближением.

Рассмотрим теперь более общий случай. Решение [10] описывает барионную ветвь – однопараметрическое семейство решений, интерполирующее между двумя классическими решениями: КШ и решением Мальдасены-Нуньеса (МН) с дилатоном, сдвинутым на бесконечную константу [17]³. Параметр семейства ξ возникает в [10] как константа интегрирования и принимает значение в пределах

$$1/6 \leq \xi \leq 5/6.$$

Граничные точки соответствуют решению МН, а КШ отвечает значению параметра $\xi = 1/2$. Барионная ветвь решений симметрична относительно точки КШ в силу ненарушенной \mathbb{Z}_2 симметрии.

Интересно было бы изучить зависимость спектра от положения на барионной ветви. К примеру, в работе [19] было установлено, что натяжение $D5$ -браны, помещенной на конифолд, не зависит от значения параметра ξ . Мы надеемся, что с помощью таких универсальных объектов, как натяжение фундаментальной струны, можно будет получить информацию об эффективном кэллеровом потенциале $\mathcal{N} = 1$ калибровочной теории.

Численный анализ спектра уравнения (11) методами ВКБ и пристрелки снова дает совпадающие с хорошей точностью результаты. Результаты вычислений представлены на рис.1, где показана зависи-

³Решение, известное в литературе как решение МН, фактически было получено в работах Шамседдина и Волкова [18].

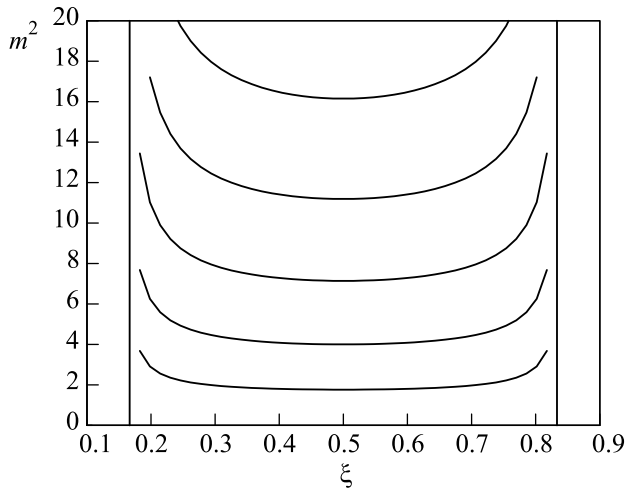
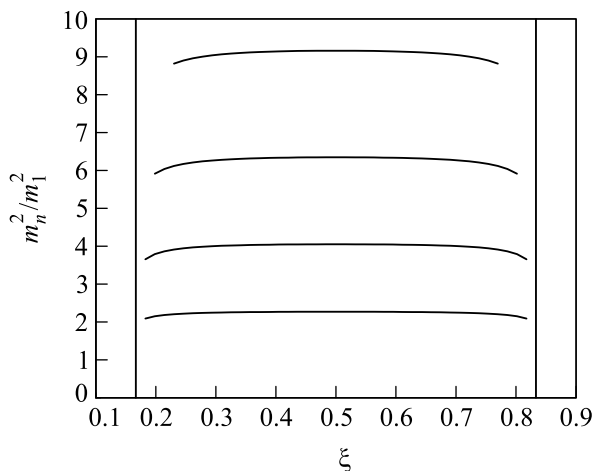


Рис.1. Спектр масс глоболов, на барионной ветви

мость низших собственных значений от параметра ξ . Несмотря на то, что вблизи точки КШ собственные значения действительно слабо зависят от ξ , они быстро растут при приближении к границе. Анализ спектра в области, близкой к МН решению, $\xi \rightarrow 1/6$ и $\xi \rightarrow 5/6$, затруднен, поскольку это решение является сингулярным пределом. Было бы осмысленным нормировать все собственные значения на самое первое, чтобы сгладить поведение вблизи сингулярностей. Результат нормировки приводит к картине, подобной рис.2.

Рис.2. Отношение m_n^2/m_1^2

Таким образом, в данной работе мы проверили предположение о том, что компоненты гравитона – внедиагонального возмущения метрики над супергравитационным решением типа барионная ветвь – удовлетворяют простому уравнению Клейна–Гордона в искривленном пространстве. Нами был изучен

спектр этого уравнения, который был найден квазиклассически, с помощью метода ВКБ, и численно, методом пристрелки. Результаты вычислений продемонстрировали совпадение двух вычислений с хорошей точностью. В окрестности решения КШ на барионной ветви собственные значения слабо меняются с вариацией параметра ξ . Это отражает тот факт, что решение [10] симметрично относительно точки $\xi = 1/2$, и потому m^2 растет как $(\xi - 1/2)^4$ во втором порядке теории возмущений.

Во время подготовки данной работы к публикации мы узнали о работе [20], результаты которой частично перекрываются с данной работой. В частности, авторы [20] показали, что гравитон описывается скалярным уравнением для большого класса метрик, а также изучили спектр гравитона для решения Клебанова–Штрасслера.

Авторы письма хотели бы выразить признательность Д.В. Гальцову, М.Р. Дугласу, В.Ч. Жуковскому и И.Р. Клебанову за многочисленные дискуссии и ценные замечания. Работа авторов частично поддерживалась грантами Российского фонда фундаментальных исследований # 04-02-16538 (А.Д.) и # 04-02-17227 (Д.М.), грантом президента РФ поддержки научных школ NSh-8004.2006.2, а также грантом Министерства энергетики США (DOE) DE-FG02-96ER40949.

1. S. Ferrara and B. Zumino, Nucl. Phys. B **87**, 207 (1975).
2. G. Veneziano and S. Yankielowicz, Phys. Lett. B **113**, 231 (1982).
3. I. Campos et al. [DESY-Munster Collaboration], Eur. Phys. J. C **11**, 507 (1999) [arXiv:hep-lat/9903014]; F. Farchioni et al. [DESY-Munster-Roma Collaboration], Eur. Phys. J. C **23**, 719 (2002) [arXiv:hep-lat/0111008]; R. Peetz, F. Farchioni, C. Gebert, and G. Munster, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119**, 912 (2003) [arXiv:hep-lat/0209065].
4. G.M. Shore, Nucl. Phys. B **222**, 446 (1983); G.R. Farrar, G. Gabadadze, and M. Schwetz, Phys. Rev. D **58**, 015009 (1998) [arXiv:hep-th/9711166]; D.G. Cerdeno, A. Knauf, and J. Louis, Eur. Phys. J. C **31**, 415 (2003) [arXiv:hep-th/0307198].
5. P.I. Pronin and K.V. Stepanyantz, arXiv:hep-th/9902163.
6. J.M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999)] [arXiv:hep-th/9711200].
7. S.S. Gubser, I.R. Klebanov, and A.M. Polyakov, Nucl. Phys. B **636**, 99 (2002) [arXiv:hep-th/0204051]; E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998) [arXiv:hep-th/9802150].

8. I. R. Klebanov and M. J. Strassler, JHEP **0008**, 052 (2000) [arXiv:hep-th/0007191].
9. P. Candelas and X. C. de la Ossa, Nucl. Phys. B **342**, 246 (1990).
10. A. Butti, M. Grana, R. Minasian et al., JHEP **0503**, 069 (2005) [arXiv:hep-th/0412187].
11. S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. A. Tseytlin, Nucl. Phys. B **499**, 217 (1997) [arXiv:hep-th/9703040]; R. C. Brower, S. D. Mathur, and C. I. Tan, Nucl. Phys. B **574**, 219 (2000) [arXiv:hep-th/9908196]; N. R. Constable and R. C. Myers, JHEP **9910**, 037 (1999) [arXiv:hep-th/9908175].
12. J. H. Schwarz, Nucl. Phys. B **226**, 269 (1983).
13. G. Papadopoulos and A. A. Tseytlin, Class. Quant. Grav. **18**, 1333 (2001) [arXiv:hep-th/0012034].
14. M. Krasnitz, arXiv:hep-th/0011179.
15. E. Caceres and R. Hernandez, Phys. Lett. B **504**, 64 (2001) [arXiv:hep-th/0011204]; X. Amador and E. Caceres, JHEP **0411**, 022 (2004) [arXiv:hep-th/0402061].
16. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, *Численные методы*, ЛБЗ, 2003 г.
17. J. M. Maldacena and C. Nunez, Phys. Rev. Lett. **86**, 588 (2001) [arXiv:hep-th/0008001].
18. A. H. Chamseddine and M. S. Volkov, Phys. Rev. Lett. **79**, 3343 (1997) [arXiv:hep-th/9707176]; A. H. Chamseddine and M. S. Volkov, Phys. Rev. D **57**, 6242 (1998) [arXiv:hep-th/9711181].
19. A. Dymarsky, I. R. Klebanov, and N. Seiberg, JHEP **0601**, 155 (2006) [arXiv:hep-th/0511254].
20. H. Firouzjahi and S. H. Tye, JHEP **0601**, 136 (2006) [arXiv:hep-th/0512076].