

Доминирующие структуры в струйных течениях

В. П. Гончаров¹⁾, В. И. Павлов*¹⁾

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, 109017 Москва, Россия

* UFR de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

Поступила в редакцию 29 мая 2006 г.

После переработки 28 августа 2006 г.

Сформулирована гамильтоновская версия для модели осесимметричных равнозавихренных струйных течений со свободной границей. В рамках этого подхода изучены доминирующие структуры – структурные элементы, возникающие в сильно возмущенных струйных течениях на предтурбулентной стадии их распада. Показано, что на роль доминирующих структур претендуют компактоны – решения с компактным носителем. Исследование механизма неустойчивости компактонов показало возможность коллапса, который происходит почти без деформации их формы, но приводит к интенсификации вихревой пелены на границе по закону $(t_0 - t)^{-1}$, где t_0 – время коллапса.

PACS: 05.45.Yv, 47.10.+g, 47.15.ki, 47.32.cd

1. Введение. Хорошо известно, что традиционное диффузионное описание гидродинамического перемешивания является достаточно грубым и не дает информации о такой существенной черте перемешивания в слоистой среде, как большие доминирующие структуры, например, термики, струи, пузыри и т.д. Поэтому построение адекватных моделей и развитие новых аналитических методов, основанных на прямом моделировании и изучении структурных элементов подобного типа, является решающим фактором для понимания процессов перемешивания.

На сегодняшний день существует большое количество как численных, так и аналитических исследований, посвященных доминирующим структурам (см. [1] и цитируемую там литературу). Так как в точной постановке изучение таких структур сопряжено с решением сложных систем нелинейных уравнений, прибегают к сравнительно простым моделям и различного рода упрощениям. На линейной стадии эти модели описывают волновую неустойчивость. Однако с ростом неустойчивостей дальнейшее адекватное описание процесса перемешивания становится невозможным и требует замены анализа отдельных гармоник рассмотрением доминирующих структур – фундаментальных форм, из которых можно составить общую картину развития процесса вплоть до наступления турбулентности. Такие формы проявляются как области когерентных движений жидкости с высокой концентрацией завихренности и отвечают собственным внутренним свойствам нелинейной среды.

Данная работа направлена на изучение доминирующих структур, возникающих в осесимметричных завихренных струйных течениях со свободной границей. Мы ограничимся сравнительно узким кругом теоретических вопросов: построением компактных решений, претендующих на роль доминирующих структур, и качественным исследованием механизма их неустойчивости. Как мы надеемся, более полному анализу коллапса и численному моделированию взаимодействия доминирующих структур будет посвящена отдельная работа.

2. Гамильтоновская версия контурной динамики для осесимметричных течений. Как известно [2], двумерную динамику несжимаемой жидкости, кусочно-однородной по плотности и завихренности, можно свести к динамике контура, игнорируя описание остальной жидкости. Однако тот факт, что описание может принимать различные гамильтоновы формы в зависимости от используемой системы координат и способа параметризации контура, не является тривиальным и заслуживает отдельного внимания.

Система скобок Пуассона, описывающая движения несжимаемой неоднородной жидкости, формулируется в терминах поля плотности ρ и поля завихренности $\gamma = \text{rot} \pi$ для плотности вихревого импульса $\pi = \rho v$, и в системе криволинейных координат $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ выглядит следующим образом [3, 4]:

$$\{\rho, \rho'\} = 0, \quad (1)$$

$$\{\rho, \gamma'^k\} = e^{knm} g^{-1/2} \partial_m \rho \partial_n g^{-1/2} \delta, \quad (2)$$

$$\{\gamma^i, \gamma'^k\} = e^{ipj} e_{jln} e^{kmn} g^{-1/2} \partial_p \gamma^l \partial_m g^{-1/2} \delta. \quad (3)$$

¹⁾ e-mail: v.gonchrov@mtu-net.ru; vadim.pavlov@univ-lille1.fr

Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, а штрихованные поляые переменные обозначают зависимость от штрихованных пространственных координат. Кроме того, обозначение $\delta = \delta(\zeta - \zeta')$ подразумевает дельта-функцию Дирака, g – определитель метрического тензора, $\partial_i = \partial/\partial\zeta^i$ – оператор дифференцирования, $e^{ikj} \equiv e_{ikj}$ – единичный антисимметричный тензор (символ Леви-Чивита), а γ^i – контравариантные компоненты вектора γ , связанные соотношением

$$\gamma^i = g^{-1/2} e^{ikn} \partial_k \varrho v_n \quad (4)$$

с ковариантными компонентами v_n гидродинамической скорости.

Скобки Пуассона (1)–(3) – отправной пункт для построения различных версий гамильтоновой контурной динамики в двумерных течениях. Изучение таких течений удобно проводить в соответствующей системе криволинейных координат, обладающей следующими свойствами: координатные линии ζ^3 совпадают по направлению с вихревыми линиями, а координатные линии ζ^1 и ζ^2 лежат на стационарных поверхностях $\zeta^3 = \text{const}$ и образуют систему поверхностных координат.

В такой системе координат все поля являются функциями только поверхностных координат $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2)$, а векторное поле завихренности γ имеет только одну компоненту $\gamma^3 = \gamma$, для которой, согласно (4), имеет место соотношение

$$\gamma = e^{\alpha\lambda} g^{-1/2} \partial_\alpha \varrho v_\lambda, \quad (5)$$

где $e^{\alpha\lambda}$ – единичный антисимметричный тензор.

В терминах скалярных полей γ и ϱ скобки Пуассона (1)–(3) редуцируются к более простому виду:

$$\{\varrho, \varrho'\} = 0, \quad (6)$$

$$\{\varrho, \gamma'\} = e^{\lambda\alpha} g^{-1/2} \partial_\alpha \varrho \partial_\lambda g^{-1/2} \delta, \quad (7)$$

$$\{\gamma, \gamma'\} = e^{\lambda\alpha} g^{-1/2} \partial_\alpha \gamma \partial_\lambda g^{-1/2} \delta. \quad (8)$$

Рассмотрим (см. рис.1) для простоты две области G^+ , G^- , которые отделены друг от друга контактной границей C , по обе стороны которой плотность ϱ и завихренность $\omega = g^{-1/2}(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)$ принимают постоянные значения. Используя знаки $+$ и $-$ для обозначения переменных соответственно в областях G^+ и G^- , запишем плотность и ковариантные компоненты гидродинамического импульса в виде разложений:

$$\varrho = \varrho^+ \theta^+ + \varrho^- \theta^-, \quad (9)$$

$$\varrho v_\alpha = \varrho^+ v_\alpha^+ \theta^+ + \varrho^- v_\alpha^- \theta^-. \quad (10)$$

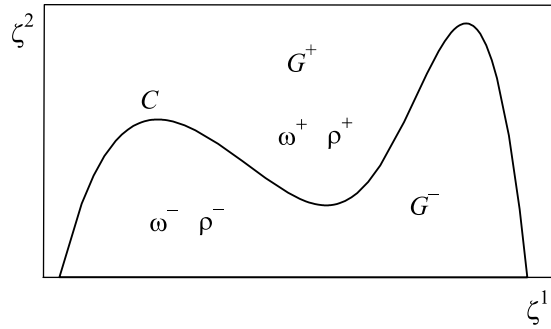


Рис.1. Схема осесимметричного равновихренного течения со свободной границей

Здесь θ^+ и θ^- – взаимно дополнительные субстанциональные характеристические функции:

$$\theta^\pm = \begin{cases} 1, & \text{если } \zeta \in G^\pm, \\ 0, & \text{если } \zeta \notin G^\pm, \end{cases}$$

которые обладают следующими свойствами:

$$\theta^+ + \theta^- = 1, \quad \theta^+ \theta^- = 0, \quad \partial_i \theta^\pm + v^\alpha \partial_\alpha \theta^\pm = 0.$$

Подстановка представления (10) в (5) приводит к выражению

$$\gamma = \omega^+ \varrho^+ \theta^+ + \omega^- \varrho^- \theta^- + \beta, \quad (11)$$

где величина

$$\beta = e^{\alpha\lambda} g^{-1/2} (\varrho^+ v_\lambda^+ - \varrho^- v_\lambda^-) \partial_\alpha \theta^+ \quad (12)$$

описывает ту часть плотности завихренности импульса, которая сосредоточена на контуре.

Ограничимся далее осесимметричными равновихренными течениями без закрутки (вращение вокруг оси отсутствует). Простейшим примером таких течений является круглая струя с параболическим профилем скорости. Другой менее тривиальный пример – вихрь Хилла [5, 6].

Естественной системой координат для изучения осесимметричных двумерных течений являются цилиндрические координаты x, r, φ , причем радиальная r и осевая x играют роль поверхностных координат ζ^1 и ζ^2 , а φ – азимутальная координата, координатные линии которой совпадают по направлению с вихревыми.

Предполагая, что контактная граница задана соотношением $r = \eta(x, t)$ (η – форма границы), выберем в качестве субстанциональной характеристической функции θ^+ обычную функцию Хевисайда

$$\theta^+ = \theta(r - \eta),$$

обладающую свойством $\theta(z) = 1$, если $z \geq 1$, и $\theta(z) = 0$, если $z < 0$.

Такой выбор позволяет переписать (9) и (11) как

$$\varrho = \varrho^- + (\varrho^+ - \varrho^-)\theta(r - \eta), \quad (13)$$

$$\gamma = \omega^- \varrho^- + \nu\theta(r - \eta) + \mu r^{-1}\delta(\eta - r), \quad (14)$$

где $\nu = \varrho^+ \omega^+ - \varrho^- \omega^-$, а μ – скачок тангенциальной компоненты импульса на контуре:

$$\mu = -\left[\eta_x(\varrho^+ v_2^+ - \varrho^- v_2^-) + (\varrho^+ v_1^+ - \varrho^- v_1^-)\right]_{r=\eta}. \quad (15)$$

Соотношения (13), (14) позволяют легко пересчитать скобки Пуассона для переменных (γ, ϱ) в скобки для переменных (η, μ) , заданных на контуре. После подстановки (13), (14) в систему (6)–(8) и ее решения в предположении $\varrho^+ - \varrho^- \neq 0$, то есть наличия скачка плотности, получим:

$$\{\eta, \eta'\} = 0, \quad (16)$$

$$\eta\{\eta, \mu'\} = -\partial_x \delta(x - x'), \quad (17)$$

$$\{\mu, \mu'\} = -\nu \partial_x \delta(x - x'). \quad (18)$$

Если $\nu \neq 0$, с помощью замены

$$\xi = \mu - \nu \eta^2 / 2, \quad (19)$$

скобки (16)–(18) приводятся к скобкам

$$\{\xi, \mu'\} = 0, \quad (20)$$

$$\{\xi, \xi'\} = \nu \partial_x \delta(x - x'), \quad (21)$$

$$\{\mu, \mu'\} = -\nu \partial_x \delta(x - x'). \quad (22)$$

Полученные скобки соответствуют уравнениям движения

$$\partial_t \xi = \nu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta \xi}, \quad \partial_t \mu = -\nu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta \mu}, \quad (23)$$

которые, кроме гамильтониана H , сохраняют интегралы

$$P = \frac{1}{2} \int (\xi^2 - \mu^2) dx, \quad (24)$$

$$T_1 = \int \xi dx, \quad T_2 = \int \mu dx. \quad (25)$$

Если сохранение интеграла (24), играющего роль вихревого импульса, связано с трансляционной инвариантностью гамильтониана H , то T_1 и T_2 являются аннуляторами скобок (20) – (22) и, следовательно, сохраняются независимо от H . Это означает, что гамильтониан в таких моделях определяется с точностью до линейных членов, которые не влияют на уравнения движения.

Процедура, позволяющая выразить гамильтониан H в терминах переменных ξ, μ , осуществляется с помощью краевой задачи. Для рассматриваемых здесь осесимметричных течений несжимаемой жидкости такая задача формулируется в терминах функции тока Стокса $\psi = \psi^+ \theta^+ + \psi^- \theta^-$.

Учитывая соотношения

$$v_1 = -r^{-1} \partial_r \psi, \quad v_2 = r^{-1} \partial_x \psi, \quad (26)$$

которыми соответствующие компоненты скорости связаны с функцией тока ψ , на основании формул (5), (15) получим краевую задачу:

$$r^{-1} (\partial_x r^{-1} \partial_x + \partial_r r^{-1} \partial_r) \psi^\pm = \omega^\pm, \quad (27)$$

$$\left[(\eta_x \partial_x - \partial_r) (\varrho^- \psi^- - \varrho^+ \psi^+) \right]_{r=\eta} = \eta \mu. \quad (28)$$

При необходимости данная краевая задача дополняется условиями непрерывности функции тока на внутренних границах раздела и постоянства на внешних.

3. Осесимметричная модель со свободной границей. Так как наличие свободной границы равносильно условию $\varrho^+ = 0$, будем предполагать далее, что жидкость единичной плотности $\varrho^- = 1$ и завихренности $\omega^- = \omega$ сосредоточена только внутри области G^- . Отметим, что аналогичные модели течений, но без скачка плотности, рассматривались в работах [7, 8].

Полагая, что в задаче существует характерный пространственный масштаб L , введем соответствующий масштаб времени $T = (\omega L)^{-1}$ и осуществим переход к безразмерным зависимым и независимым переменным. Тогда для данной модели уравнения движения (23) выглядят следующим образом:

$$\partial_t \xi = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta \xi}, \quad \partial_t \mu = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta \mu}. \quad (29)$$

При вычислении гамильтониана H будем исходить из интеграла кинетической энергии

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int dx \int_0^\eta r^{-1} \left((\partial_r \psi^-)^2 + (\partial_x \psi^-)^2 \right) dr, \quad (30)$$

с которым H совпадает, но с точностью до линейных членов, не влияющих на уравнения движения. По этой причине гамильтониан H может быть любого знака, хотя \mathcal{E} – сугубо положительная величина.

На основании (27), (28) для функции тока ψ^- , через которую выражается кинетическая энергия \mathcal{E} , имеет место краевая задача:

$$(\partial_x r^{-1} \partial_x + \partial_r r^{-1} \partial_r) \psi^- = r, \quad (31)$$

$$(\eta_x \partial_x - \partial_r) \psi^- |_{r=\eta} = \eta \mu, \quad (32)$$

дополненная условием “калибровки” $\psi^-|_{r=0} = 0$ на оси.

По аналогии с работами [7, 8], общее решение краевой задачи (31), (32) будем искать в виде

$$\psi^- = \frac{1}{8}r^4 + rI_1(r\Gamma)A, \quad (33)$$

где $I_1(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого порядка, Γ – оператор, который определяется соотношением $\Gamma = \partial_x \hat{H}$, а \hat{H} – так называемое преобразование Гильберта

$$\hat{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(x')}{x-x'} dx'.$$

Замечательными свойствами этих операторов являются тождества

$$\hat{H}^2 = -1, \quad \hat{H}^+ = -\hat{H}, \quad \Gamma^2 = -\partial_x^2, \quad \Gamma^+ = \Gamma.$$

Подстановка (33) в краевое условие (32) приводит к уравнению

$$\partial_x I_0(\eta\Gamma) \hat{H}A = -\xi. \quad (34)$$

Если мы ограничиваемся “минимальной” моделью, претендующей лишь на качественное описание, то в первом приближении достаточно учесть только члены второго порядка по производной ∂_x . В этом случае, разлагая псевдодифференциальный оператор $I_0(\eta\Gamma)$ в ряд теории возмущений, из уравнения (34) легко найти решение

$$\Gamma A = - \left(1 + \frac{1}{4} \partial_x \eta^2 \partial_x \right) \xi,$$

а затем и гамильтониан модели

$$H = \int \left(\frac{1}{3!} (\xi^3 - \mu^3) - \frac{3}{4!} (\xi - \mu)^2 \xi_x^2 \right) dx. \quad (35)$$

Соответствующие уравнения контурной динамики выписываются на основании (2) и в данном приближении выглядят как

$$\partial_t \xi = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta \xi} = - \frac{1}{2} \partial_x \left(\xi^2 - \frac{1}{2} (\xi - \mu) \xi_x^2 + \frac{1}{2} \partial_x (\xi - \mu)^2 \xi_x \right), \quad (36)$$

$$\partial_t \mu = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta \mu} = - \frac{1}{2} \partial_x \left(\mu^2 - \frac{1}{2} (\xi - \mu) \xi_x^2 \right). \quad (37)$$

4. Компактонные решения. Рассмотрим решения в виде так называемых стационарных возмущений

$$\xi = \xi(s), \quad \mu = \mu(s), \quad s = x - ct,$$

распространяющихся с постоянной скоростью c без деформации профиля.

После подстановки этих решений в уравнения (36), (37), интегрирования и несложных преобразований, эти уравнения принимают вид

$$\frac{\xi^3 - \mu^3}{3} + \frac{1}{4} (\xi - \mu)^2 \xi_s^2 - c (\xi^2 - \mu^2) + c_1 \xi - c_2 \mu - c_3 = 0, \quad (38)$$

$$\mu^2 - \frac{1}{2} (\xi - \mu) \xi_s^2 - 2c\mu + c_2 = 0, \quad (39)$$

где константы интегрирования c_1, c_2, c_3 фиксируются типом решения, который определяется поведением ξ, μ при $s \rightarrow \pm\infty$.

Анализ уравнений (38), (39) показывает, что они могут иметь как периодические, так и локализованные решения. С точки зрения изучения финальной стадии развития сильно возмущенного струйного течения, когда струя разбивается на отдельные вихревые сгустки, из всех решений наибольший интерес представляют решения с компактным носителем. В отличие от традиционных солитонных решений, такие возмущения, называемые *компактонами* [9], не обладают исчезающими на бесконечности хвостами и, следовательно, не хранят память о невозмущенном режиме. Именно поэтому в рамках рассматриваемой модели компактоны претендуют на роль структур, доминирующих на предтурбулентной стадии эволюции струйного течения.

Для уравнений (38), (39) соответствующий класс решений реализуется при выборе параметров

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

В этом случае уравнения (38), (39) допускают параметризацию

$$\xi = c(1 - \cos \varphi + 2 \sin \varphi), \quad \mu = c(1 - \cos \varphi - \sin \varphi),$$

которая при $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ и, соответственно, $c \geq 0$ приводит к уравнению

$$\frac{3}{4} c (\sin \varphi + 2 \cos \varphi)^2 \varphi_s^2 = \cos \varphi. \quad (40)$$

Так как в силу (19) справедливо соотношение $\eta^2 = 2(\xi - \mu)$, для определения формы компактона имеет место простая связь

$$\eta^2 = 6c \sin \varphi. \quad (41)$$

На основании этой формулы легко установить, что если в качестве масштаба длины выбрать поперечный полуразмер компактона R , то в системе единиц

$L = R$ и $T = (\omega R)^{-1}$ безразмерная скорость компактона является постоянной величиной $c = 1/6$. Чтобы пересчитать скорость компактона v в размерных единицах, нужно воспользоваться формулой $v = cL/T$, которая приводит к соотношению

$$v = \frac{\omega}{6} R^2,$$

где поперечный полуразмер компактона R выполняет роль управляющего параметра.

Полагая, что максимальное значение $\eta = 1$ достигается в точке $s = 0$ при $\varphi = \pi/2$, из (40) и (41) находим параметрическое описание формы компактона:

$$\eta = \sin^{1/2} \varphi,$$

$$s = \pm \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \cos^{1/2} \varphi + E\left(\frac{\pi}{4}, 2\right) - E\left(\frac{\varphi}{2}, 2\right) \right),$$

где $E(\varphi, k)$ – эллиптический интеграл второго рода.

Графики для решений ξ , μ и η приведены на рис.2.

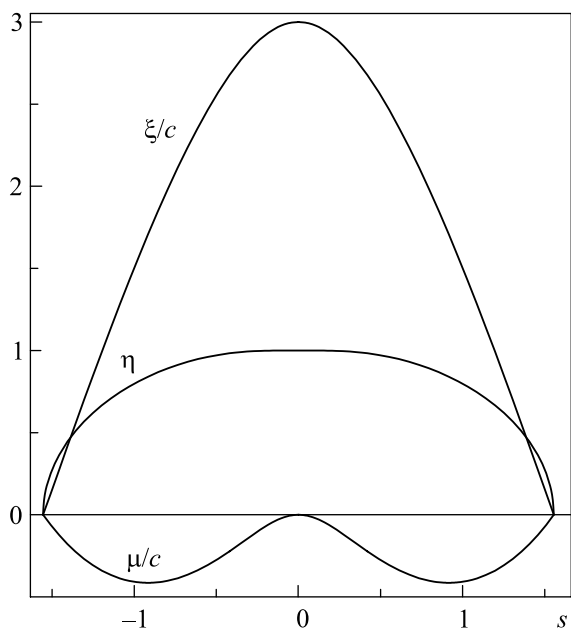


Рис.2. Графики функций ξ/c и μ/c , и форма контура η

5. Неустойчивость компактонов. Изучим устойчивость полученных решений. Особое значение вопрос об устойчивости локализованных решений приобретает в связи с явлением коллапса – образованием особенности за конечное время [10, 11]. В частности, это явление может проявляться как перманентное самосжатие локализованного возмущения, которое при фиксированных интегралах движения

должно сопровождаться бесконечным ростом его амплитуды.

Для исследования неустойчивости введем новые переменные

$$q = \xi - \mu, \quad z = \frac{1}{2} (\xi + \mu),$$

в терминах которых уравнения контурной динамики (36), (37), гамильтониан H и, что особенно следует подчеркнуть, интеграл движения P принимают более удобный для последующего анализа вид:

$$\partial_t q = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta z}, \quad \partial_t z = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta q}, \quad (42)$$

$$H = I_1 - I_2, \quad (43)$$

$$I_1 = \frac{1}{4!} \int (q^3 + 12qz^2) dx, \quad (44)$$

$$I_2 = \frac{3}{4!} \int q^2 \left(\frac{1}{2} q_x + z_x \right)^2 dx, \quad (45)$$

$$P = \int qz dx. \quad (46)$$

Компактонные решения можно рассматривать как точку равновесия в бесконечномерном фазовом пространстве полей q , z . Действительно, на компактонных решениях уравнения движения записываются в виде

$$cq - \frac{\delta H}{\delta z} = 0, \quad cz - \frac{\delta H}{\delta q} = 0,$$

что может быть истолковано как следствие вариационной задачи

$$\delta(H - cP) = 0, \quad (47)$$

в которой скорость компактона c играет роль множителя Лагранжа.

Таким образом, вариационное равенство (47) указывает, что в этой точке реализуется экстремум функционала H при фиксированном P . В соответствии с теоремой Ляпунова, данная стационарная точка устойчива, если она реализует минимум или максимум гамильтониана. Если же стационарная точка представляет собой седловую точку, то данное состояние неустойчиво.

Для исследования типа стационарной точки существует специальный прием [12]. Этот прием основан на рассмотрении преобразований, которые оставляют инвариантным интеграл движения P . После применения таких преобразований гамильтониан H становится обычной функцией параметров, что позволяет легко выяснить тип стационарной точки.

В качестве одного из таких преобразований возьмем двухмасштабное преобразование

$$q \rightarrow \beta \alpha^{-1/2} q \left(\frac{x}{\alpha} \right), \quad z \rightarrow \beta^{-1} \alpha^{-1/2} z \left(\frac{x}{\alpha} \right),$$

где α и β – параметры этого преобразования.

Рассмотрим вначале случай $\beta \equiv 1$. Применяя соответствующее преобразование к гамильтониану H , получим

$$H(\alpha) = \alpha^{-1/2} I_1 - \alpha^{-3} I_2.$$

Так как на компактных решениях интегралы I_1, I_2 связаны соотношениями

$$I_1 + I_2 = cP, \quad \frac{1}{2} I_1 - 3I_2 = 0,$$

первое из которых следует из (38), а второе – из условия равновесия $\partial H / \partial \alpha|_{\alpha=1} = 0$, для гамильтониана $H(\alpha)$ найдем

$$H(\alpha) = \frac{cP}{7} \left(6\alpha^{-1/2} - \alpha^{-3} \right),$$

где величина cP – положительна. Положительность следует из соотношения $cP = 7I_2$.

График этой функции приведен на рис.3 (кривая a). При $\alpha \rightarrow 0$ функция $H(\alpha)$ не ограничена снизу,

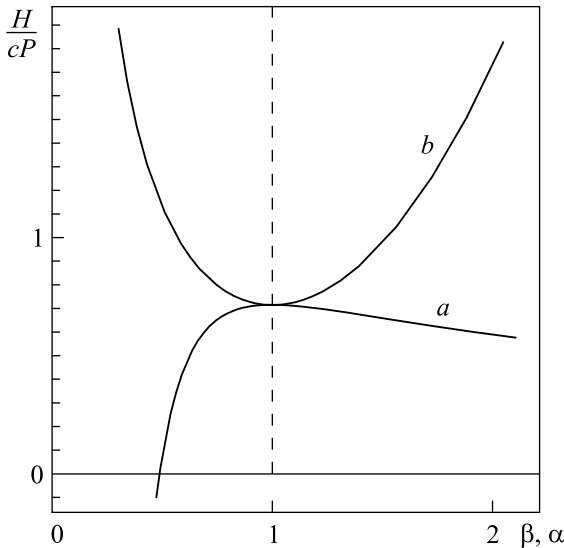


Рис.3. Зависимость гамильтониана компактона от параметров преобразования α (кривая a) и β (кривая b)

при $\alpha \rightarrow \infty$ стремится к нулю, а в точке равновесия $\alpha = 1$ реализуется максимум.

Аналогично рассматривается случай $\alpha \equiv 1$. График функции $H(\beta)$ приведен на рис.3 (кривая b). Теперь, наоборот, при $\beta \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow \infty$ функция $H(\beta)$ не

ограничена сверху, а в точке равновесия $\beta = 1$ реализуется минимум. Таким образом, компактным решениям соответствует седловая точка функционала H , что указывает на неустойчивость этих решений.

6. Автомоделный коллапс. Для того чтобы изучить финальную стадию развития неустойчивости, рассмотрим автомоделный сценарий коллапса, полагая, что вблизи точки коллапса $t = t_0$ справедливы зависимости

$$q = \hat{q}(x - ct), \quad z = (t_0 - t)^{-1} \hat{z}(x - ct), \quad (48)$$

где c – скорость распространения возмущения. Решения (48) описывают режим коллапса, обусловленный генерацией асимметричной моды в распределении вихревой пелены на свободной границе.

Перейдем в сопровождающую систему координат $s = x - ct$. Учитывая, что этот переход влечет за собой преобразование $H \rightarrow H + cP$, для гамильтониана (43) получим

$$H = I_1 - I_2 + cP = \frac{1}{2} \int \left(2cqz + qz^2 + \frac{1}{12} q^3 - \frac{1}{4} q^2 \left(\frac{1}{2} q_s + z_s \right)^2 \right) ds. \quad (49)$$

Предполагая в соответствии с (48), что в окрестности коллапса главную роль играют самые старшие по z члены, из (49) получим “укороченный” гамильтониан

$$H_{col} = \frac{1}{2} \int \left(qz^2 - \frac{1}{4} q^2 z_s^2 \right) ds,$$

отличающийся от (49) тем, что в нем отброшены все менее значимые члены.

Соответствующие гамильтониану H_{col} уравнения движения имеют вид

$$\partial_t q = -\partial_s \frac{\delta H_{col}}{\delta z} = -\partial_s \left(qz + \frac{1}{4} \partial_s (q^2 z_s) \right), \quad (50)$$

$$\partial_t z = -\partial_s \frac{\delta H_{col}}{\delta q} = -\partial_s \left(\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{4} qz_s^2 \right). \quad (51)$$

После подстановки (48) в (50), (51) для структурных функций \hat{q}, \hat{z} получим уравнения

$$\hat{q} \hat{z} = -\frac{1}{4} \partial_s (\hat{q}^2 \hat{z}_s),$$

$$\hat{z} (1 + \hat{z}_s) = \frac{1}{4} \partial_s (\hat{q} \hat{z}_s^2).$$

У этих уравнений есть интеграл

$$\hat{q}^2 \hat{z}_s (3\hat{z}_s + 2) = \text{const},$$

и, как следствие, они имеют единственное регулярное решение

$$\hat{q} = b^2 - s^2, \quad \hat{z} = -\frac{2}{3}s, \quad (52)$$

которое соответствует выбору $\text{const} = 0$ и локализовано на отрезке $-b \leq s \leq b$. Обсуждение других (сингулярных) решений, которые также могут представлять интерес, выходит за рамки настоящей статьи.

Отметим, что на автомодельных подстановках (48) автоматически обеспечиваются условия $H_{col} = 0$, $P = 0$, $T_1 = -T_2 = \text{const}$. Таким образом, автомодельные решения не нарушают законы сохранения и соответствуют сценарию слабого коллапса.

Если структурная функция \hat{q} характеризует форму возмущения, то \hat{z} характеризует распределение автомодельной компоненты вихревой пелены. На основании (52) легко установить, что на автомодельной стадии возмущение представляет собой сплюснутый эллипсоид вращения с отношением полуосей $a/b = \sqrt{2}$. Полуоси эллипсоида (продольную b и поперечную a) можно вычислить на основании закона сохранения:

$$I = \int q dx = \frac{4}{3}b^3.$$

В частности, если в качестве начального состояния выбирается компактон, то $I = 1.09$ и, следовательно, $b = 0.93$, $a = 1.32$.

На поверхности этого эллипсоида со временем по закону $(t_0 - t)^{-1}$ и с распределением $\hat{z} = -\frac{2}{3}s$ происходит интенсификация асимметричной моды вихревой пелены.

Заключение. Таким образом, проведенное исследование показывает, что для равнозавихренных струйных течений с числом Атвуда, близким к 1 (большой контраст плотности на контактной границе) существует эффект, который приводит к дроблению струи на отдельные вихревые сгустки. Представленный здесь модельный подход позволил выявить форму этих структур и исследовать механизм

их неустойчивости. Установлено, что коллапс, обусловленный генерацией асимметричной моды в распределении вихревой пелены, не приводит к значительному искажению формы компактона. Как показывают оценки, параметр масштабного преобразования останавливается на значении $\alpha \approx 0.6$, что свидетельствует о поперечном увеличении компактона всего в $\alpha^{-1/2} \approx 1.3$ раза при его продольном сжатии вдоль оси x в $\alpha^{-1} \approx 1.6$ раза. По существу, эффект коллапса сводится к интенсификации вихревой пелены, интенсивность которой μ растет со временем по закону $\mu \sim (t_0 - t)^{-1}$.

Авторы признательны В. М. Пономареву за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 06-05-64185), программы президиума РАН "Математические методы в нелинейной динамике" и гранта Президента РФ НПШ - # 4166.2006.5.

1. Н. А. Иногамов, А. Ю. Демьянов, Э. Е. Сон, *Гидродинамика перемешивания*, М.: Изд-во МФТИ, 1999.
2. N. J. Zabusky, M. H. Hughes, and K. V. Roberts, *J. Comput. Phys.* **30**, 96 (1979).
3. V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, *ЖЭТФ* **119**, 685 (2001).
4. В. П. Гончаров, В. И. Павлов, в кн. *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей*, под ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева, М. А. Соколовского, Институт компьютерных исследований, Москва - Ижевск, 2003, стр. 179.
5. Л. М. Милн-Томсон, *Теоретическая гидродинамика*, М.: Мир, 1964.
6. Ф. Дж. Сэффмэн, *Динамика вихрей*, М.: Научный мир, 2000.
7. В. П. Гончаров, *Изв. АН СССР, МЖГ* № 2, 65 (1986).
8. V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **19**, 831 (2000).
9. P. Rosenau, *Notices of the AMS* **55**, 738 (2005).
10. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, *ЖЭТФ* **91**, 1310 (1986).
11. Е. А. Кузнецов, *Изв. вузов. Радиофизика* **56**, 342 (2003).
12. G. H. Derrick, *J. Math. Phys.* **5**, 1252 (1964).