

# Спектр экситонов для двумерных электронных систем при дробных заполнениях уровней Ландау

С. В. Иорданский, А. Б. Кашуба

Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 119334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 октября 2006 г.

Показано, что для двумерных кристаллических решеток при рациональном дробном числе  $p/q$  квантов потока магнитного поля на один электрон возникает  $q$  линий поглощения света. Линии поглощения соответствуют различным энергиям образования экситонов и определяются кулоновским взаимодействием электрона и дырки. Вычислено число линий поглощения для электронных плотностей, соответствующих дробному квантовому эффекту Холла.

PACS: 73.43.–f

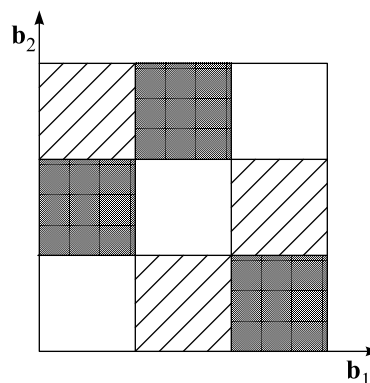
В работе [1] была высказана гипотеза о том, что обширная совокупность дробных заполнений уровней Ландау (УЛ) и наблюдаемый дробный квантовый эффект Холла связаны с рациональным числом квантов потока магнитного поля на один электрон. В работе [1] предполагалось, что двумерные электроны образуют вигнеровский кристалл – вихревую решетку с зонной структурой, определяемой проективными представлениями группы трансляций в магнитном поле [2, 3] (изложение этого представления имеется в [4]). В настоящей работе мы рассмотрим особенности экситонных спектров, возникающих при заполнении совокупности зон (один электрон на элементарную ячейку), отделенных щелью от более высоких по энергии зон.

Экситон образуется путем перехода электрона из некоторого состояния в заполненных зонах в некоторое состояние в пустых зонах. При этом необходимо учитывать наличие вырожденных по энергии подзон как для электрона, так и для образующейся дырки. Это приводит к появлению многократного вырождения экситонных состояний. Целью работы является исследование снятия зонного вырождения для экситонов кулоновским взаимодействием электрона и дырки и установление связи вида спектра для дробных заполнений УЛ с величиной дроби. Экспериментальное наблюдение таких спектров могло бы дать подтверждение или опровержение предложенной в [1] модели систем с дробным квантовым эффектом Холла. Отметим, что поставленная задача может представлять и независимый от КЭХ интерес.

Как показано в работах [2, 3], при рациональном числе  $p/q$  квантов потока магнитного поля на элементарную ячейку можно выбрать некоторую укрупненную ячейку с минимальным целым числом квантов потока. В дальнейшем для вихревых решеток [1] под

магнитным полем подразумевается сумма внешнего магнитного поля и “эффективного” магнитного поля вихрей, дающего некоторое дополнительное целое число квантов потока на элементарную ячейку. Соответственно имеются блоховские состояния, дающие обычные представления подгруппы трансляций на увеличенные периоды, а квазиимпульс находится в уменьшенной зоне Бриллюэна по сравнению с исходной (см. [4]). Однако при трансляции на меньшие периоды возникают новые линейно независимые волновые функции с той же энергией, совокупность которых покрывает всевозможные трансляции в исходной решетке.

При этом различным кусочно непрерывным энергиям соответствует область  $(\mathbf{b}_1/q, \mathbf{b}_2/q)$  значений квазиимпульса, где  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  – векторы, определяющие исходную зону Бриллюэна. На рисунке это показана



Элементарная ячейка для квадратной решетки при  $q=3$

но для  $q = 3$  и квадратной решетки, где одинаковая штриховка соответствует подзонам с одинаковой энергией. Все эти  $q$  зон не имеют щелей между собой. Следующие  $q$  магнитных подзон в ситуации общего

положения будут отделены щелью, точно так же, как это имеет место без магнитного поля, что предполагается в дальнейшем.

Наименьшая зонная энергия экситона соответствует максимальной энергии дырки в занятых зонах и минимальной энергии электрона в свободных зонах. Мы будем предполагать, что точки максимума и минимума зонной энергии определяются точечной кристаллической группой и одинаковы в каждой из магнитных подзон, то есть незаполненные зоны имеют минимумы в тех же точках, где заполненные подзоны имеют максимумы. Таким образом, имеется  $q^2$  экситонов с одинаковой зонной энергией. Это могут быть как  $q$  прямых экситонов (электрон и дырка в одинаковых магнитных подзонах), так и  $q(q-1)$  косых экситонов с разными подзонами для электрона и дырки. Целью работы является изучение влияния кулоновского взаимодействия на кратность вырождения.

Электронные операторы вторичного квантования разлагаются по зонным функциям, имеющим вид

$$\psi_{\mathbf{k},s} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_{s,\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{k}$  – квазиимпульс,  $s$  – индекс магнитной подзоны. Совокупность  $q$  функций  $\psi_{\mathbf{k},s}$ , где  $s = 0, \dots, q-1$ , осуществляет проективное представление группы трансляций, причем все функции могут быть получены из какой-то одной использованием трансляций на периоды, меньшие периода магнитной подзоны. Для индекса  $s$  введем индекс, нумерующий заполнение  $q$  магнитных подзон  $s_i$ , так что заполнение всех значений величин  $s_i$  и  $\mathbf{k}$  соответствует плотности один электрон на элементарную ячейку.

Волновая функция экситона с минимальной зонной энергией имеет вид (см., например, [5])

$$\Phi_{\text{exc}} = \sum_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \sigma_0, \sigma_1} \Phi_{\sigma_1, \sigma_0}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0) a_{\sigma_1}^+(\mathbf{k}_1) a_{\sigma_0}(\mathbf{k}_0) |0\rangle, \quad (2)$$

где  $a, a^+$  – операторы вторичного квантования для введенных зонных состояний,  $\sigma_0$  принадлежит низшим зонным состояниям  $S_0$ ,  $\sigma_1$  принадлежит следующим по энергии состояниям  $S_1$ . Волновая функция  $|0\rangle$  соответствует полностью заполненной совокупности зон  $S_0$ . Имея в виду поглощение света, мы будем интересоваться низшими энергетическими состояниями прямых экситонов, полагая  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0$ . Рассмотрение различных косых экситонов отличается несущественно. Мы будем предполагать, что кулоновское взаимодействие мало по сравнению с зонными эффектами и боровский радиус водородоподобно-

го экситона велик по сравнению с постоянной решетки. Поэтому можно пренебречь состояниями вдали от минимумов зонной энергии. Мы считаем электроны полностью поляризованными и опускаем спиновый индекс.

Оператор кулоновской энергии имеет вид

$$H_c = \frac{1}{2} \int V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \psi^+(\mathbf{r}) \psi^+(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}) d^2r d^2r'. \quad (3)$$

После разложения операторов вторичного квантования по зонным состояниям и интегрирования по координатам кулоновское взаимодействие принимает вид

$$H_c = \frac{1}{2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} V(q) \times \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}', m m', n n'} J_{mn}(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p}) J_{m'n'}(\mathbf{p}', \mathbf{p}' + \mathbf{q}) \times a_m^+(\mathbf{p} + \mathbf{q}) a_{m'}^+(\mathbf{p}') a_{n'}(\mathbf{p}' + \mathbf{q}) a_n(\mathbf{p}), \quad (4)$$

где

$$J_{mn}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 1/A \int d^2r u_{m\mathbf{p}_1}^*(\mathbf{r}) u_{n\mathbf{p}_2}(\mathbf{r}),$$

причем нормировка имеет вид

$$1/A \int d^2r |u_{m\mathbf{p}}|^2 = 1,$$

где  $A$  – площадь образца, и ортогональность при  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$ ,  $m \neq n$ .

Уравнение Шредингера для волновой функции экситона имеет вид  $H\Phi_{\text{exc}} = E\Phi_{\text{exc}}$ , где

$$H\Phi_{\text{exc}} = \sum_{\sigma_1 \sigma_0, \mathbf{k}} \Phi_{\sigma_1 \sigma_0}(\mathbf{k}) [H, a_{\sigma_1}^+(\mathbf{k}) a_{\sigma_0}(\mathbf{k})] |0\rangle + E_0 \Phi_{\text{exc}}, \quad (5)$$

где полный гамильтониан  $H$  есть сумма чисто зонного гамильтониана  $H_0$  и кулоновского  $H_c$ ,  $E_0$  – энергия основного состояния при заполнении один электрон на элементарную ячейку. При вычислении коммутатора с кулоновским гамильтонианом необходимо учитывать наличие положительно заряженного фона, устраняющего сингулярные при малых импульсах члены в коммутаторе. Вычисление коммутатора является простой операцией и дает в проекции на одноэкситонные состояния

$$[H_c, a_{\sigma_1}^+(\mathbf{k}) a_{\sigma_0}(\mathbf{k})] |0\rangle = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} V(q) \times \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}', m m', n n'} J_{mn}(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p}) J_{m'n'}(\mathbf{p}', \mathbf{p}' + \mathbf{q}) \times \{ \delta_{m n'} \delta_{\mathbf{p}' \mathbf{p}} (\delta_{m' \sigma_0} \delta_{\mathbf{p}' \mathbf{k}} a_{\sigma_1}^+(\mathbf{k}) a_n(\mathbf{p}) - \delta_{n \sigma_1} \delta_{\mathbf{p} \mathbf{k}} a_{m'}^+(\mathbf{p}') a_{\sigma_0}(\mathbf{k}) - \delta_{n \sigma_1} \delta_{\mathbf{p} \mathbf{k}} \delta_{m' \sigma_0} \delta_{\mathbf{p}' \mathbf{k}} a_m^+(\mathbf{p} + \mathbf{q}) a_{n'}(\mathbf{p}' + \mathbf{q}) \} |0\rangle. \quad (6)$$

В полученном выражении в первом и втором членах в фигурных скобках импульс волновой функции экситона сохраняется. При подстановке в уравнение Шредингера эти диагональные по импульсу члены дают модификацию зонной энергии Хартри–Фока электрона и дырки по отдельности:  $\epsilon_{\sigma_1}(\mathbf{k}) \rightarrow \hat{\epsilon}_{\sigma_1\sigma'_1}(\mathbf{k})$  и  $\epsilon_{\sigma_0}(\mathbf{k}) \rightarrow \hat{\epsilon}_{\sigma_0\sigma'_0}(\mathbf{k})$ . Для нас важно то обстоятельство, что при сдвиге импульса на малый период (меньший периода магнитной подзоны) тензор зонной энергии Хартри–Фока преобразуется унитарным вращением:  $\hat{\epsilon}(\mathbf{k} + \mathbf{b}_1/q) = U\hat{\epsilon}(\mathbf{k})U^+$ . Формально это связано с тем, что произведение  $J_{mn}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k})J_{m'n'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})$  при сдвиге  $\mathbf{k}$  на малый период преобразуется только домножением на фазовый множитель, который для собственных значений тензора энергии должен быть равным единице. В частности, энергия экситона не зависит от номера минимума  $i$  в магнитной зоне, так как переход от одного минимума к другому осуществляется с помощью сдвига всех блоховских функций на малые периоды, что не меняет интегралов  $J$ .

Таким образом, уравнение Шредингера будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{k}, \sigma_0\sigma_1\sigma'_0\sigma'_1} [E_{exc} - \delta_{\sigma_0\sigma'_0}\hat{\epsilon}_{\sigma_1\sigma'_1}(\mathbf{k}) + \delta_{\sigma_1\sigma'_1}\hat{\epsilon}_{\sigma_0\sigma'_0}(\mathbf{k})] \times \\ & \times \Phi_{\sigma_1\sigma'_0}(\mathbf{k}) a_{\sigma'_1}^+(\mathbf{k}) a_{\sigma'_0}(\mathbf{k}) |0\rangle = \\ & = - \sum_{\mathbf{k}, \sigma_0\sigma_1, mn} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \sum_{m, n} J_{m\sigma_1}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}) \times \\ & \times J_{\sigma_0 n}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \Phi_{\sigma_1\sigma_0}(\mathbf{k}) a_m^+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) a_n(\mathbf{k} + \mathbf{q}) |0\rangle. \quad (7) \end{aligned}$$

Под суммированием по  $\mathbf{k}$  подразумевается перебор всех минимумов зонной энергии и последовательное рассмотрение малых отклонений квазиимпульса в каждом из минимумов. Так как зонные состояния образуют ортонормированную систему, то получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} & E_{exc} \Phi_{\sigma_1\sigma_0}(\mathbf{k}) = \\ & = [\delta_{\sigma_0\sigma'_0}\hat{\epsilon}_{\sigma_1\sigma'_1}(\mathbf{k}) - \delta_{\sigma_1\sigma'_1}\hat{\epsilon}_{\sigma_0\sigma'_0}(\mathbf{k})] \Phi_{\sigma'_1\sigma'_0}(\mathbf{k}) - \\ & - \int V(q) \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \sum_{\sigma'} J_{\sigma_1\sigma'_1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) \times \\ & \times J_{\sigma'_0\sigma_0}(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{k}) \Phi_{\sigma'_1\sigma'_0}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (8) \end{aligned}$$

для волновой функции экситона с квазиимпульсом движения как целого, равным нулю.

В уравнении Шредингера (8) зонные энергии  $H_0$  можно разложить по квазиимпульсам вблизи зонных минимумов  $\mathbf{k}_i$ :

$$\epsilon_{\sigma_1}(\mathbf{k}) - \epsilon_{\sigma_0}(\mathbf{k}) \approx \frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_i)^2. \quad (9)$$

Мы ограничимся приближением эффективной массы, предполагая большую величину боровского радиуса  $r_b = \hbar^2\kappa/m_{\text{eff}}e^2$  по сравнению с постоянной решетки. Это обстоятельство не является очевидным, так как эффективные массы при наличии сильного внешнего магнитного поля (размеры элементарной ячейки сравнимы с магнитной длиной) могут существенно меняться. Однако мы будем считать, что большую величину боровского радиуса гарантирует большое значение диэлектрической постоянной  $\kappa$ . В приближении эффективной массы волновая функция экситона  $\Phi(\mathbf{k})$  будет сосредоточена в малой области с размерами порядка обратного боровского радиуса около минимумов  $\mathbf{k}_i$ . Для кулоновского взаимодействия  $V(\mathbf{q}) = 2\pi e^2/|\mathbf{q}|$  и недиагональные члены меньше диагональных в отношении  $1/r_b|\mathbf{b}|$ . В пренебрежении недиагональными членами существует  $q$  решений уравнения Шредингера (8) отдельно для каждого минимума зонной энергии  $i$ : нормированные волновые функции  $\Phi_{\sigma_1\sigma_0}(\mathbf{k}, i)$ , локализованные вблизи минимумов зонной энергии  $\mathbf{k}_i$ . Соответствующая собственная энергия экситона  $E_{\text{exc}}^0$  не зависит от  $i$  из-за эквивалентности всех  $i$ . Таким образом, диагональные члены можно не рассматривать, если мы интересуемся только снятием вырождения.

Спектр экситона состоит из дискретных уровней и зон, причем экситону низшей энергии соответствует дискретное связанное состояние противоположно заряженных электрона и дырки. Например, в частном случае слабой связи и тогда, когда дырка имеет большую массу, от каждой электронной зоны (при учете рассеяния электрона на неподвижной дырке) отщепится два связанных состояния по одному на каждый край зоны. Нас интересует снятие вырождения для основного дискретного связанного состояния кулоновским взаимодействием.

Произвольное состояние экситона в приближении эффективной массы является суперпозицией диагональных состояний:

$$\Phi_{\sigma_1\sigma_0}(\mathbf{k}) = \sum_{i=0}^{q-1} A_i \Phi_{\sigma_1\sigma_0}(\mathbf{k}, i), \quad (10)$$

где под квазиимпульсами подразумевается отклонение от точки минимума зонной энергии. Матричные элементы перехода между различными зонными минимумами  $\mathbf{k}_i$  будут осуществляться недиагональными кулоновскими матричными элементами путем сдвига квазиимпульса на  $\mathbf{q}_{ij} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j$  и при фиксированных  $\mathbf{q}_{ij}$  не будут зависеть от пар, между которыми происходят переходы. Соответствующее секулярное

уравнение определяет коэффициенты  $A_i$  и величину расщепления экситонной энергии:

$$(E_{exc} - E_{exc}^0)A_i = - \sum_j M_{ij}A_j, \quad (11)$$

где

$$M_{ij} = \int V(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \frac{d^2k d^2p}{(2\pi)^4} J_{\sigma'_1\sigma_1}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) J_{\sigma_0\sigma'_0}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \times \\ \times \Phi_{\sigma_1\sigma_0}(\mathbf{p}, i) \Phi_{\sigma'_1\sigma'_0}^*(\mathbf{k}, j). \quad (12)$$

Матричные элементы  $M_{ij}$  зависят только от разницы  $i - j$  по модулю  $q$  и могут быть поэтому разложены в ряд:

$$M_{ij} = \sum_{s=0}^{q-1} M_s \exp\left(\frac{2\pi i s}{q}(i - j)\right). \quad (13)$$

Матричный элемент  $M_s = |M_s|e^{i\phi}$  имеет фазу, зависящую от вида блоховских функций, причем условие эрмитовости требует выполнения условия  $M_{-s \bmod q} = M_s^*$ . Матричный элемент, отвечающий переходу из данного минимума в два ближайших соседних, будет по порядку величины иметь вид

$$|M_{i,i\pm 1}| \sim \\ \sim V_c(q_{\min}) |J_{\sigma'_i, \sigma'_{i\pm 1}}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_{i\pm 1}) J_{\sigma_{i\pm 1}, \sigma_i}(\mathbf{k}_{i\pm 1}, \mathbf{k}_i)| \frac{1}{r_b^2} < \\ < \frac{1}{q_{\min} r_b} \frac{e^2}{\kappa r_b}. \quad (14)$$

Неравенство есть следствие неравенства Буняковского–Шварца для величин  $J$ .

Так как все  $\mathbf{k}_i$  могут быть получены путем трансляции на  $\mathbf{b}_1/q$  из какого-то одного, причем повторение трансляций  $q$  раз дает эквивалентный квазиимпульс, то граничное условие будет иметь вид  $A_q = A_0$ . Решение секулярного уравнения (11) с соответствующим граничным условием имеет вид  $A_j^t = \exp(2\pi i t j/q) / \sqrt{q}$  и уровни энергии

$$E_t = \sum_{s=0}^{q-1} |M_s| \cos\left(\frac{2\pi s t}{q} + \phi\right). \quad (15)$$

Таким образом, происходит расщепление минимальной энергии экситона на  $q$  подзон. Для фаз  $\phi$  общего положения все  $q$  подзон будут иметь разную энергию. Поглощение или излучение света определяется фурье-компонентами тока в экситоне с малыми значениями импульса, причем частоты будут определяться найденным расщеплением. Таким образом, для подсчета числа линий поглощения достаточно знать величину  $q$ .

Рассмотрение косых экситонов приводит к следующей классификации для  $q$  нечетного. Прямой

экситон с  $t = 0$  отличается по энергии. К каждому из оставшихся  $q - 1$  прямых экситонов добавляется  $q - 1$  косых экситонов с той же энергией и таким образом образуется  $q - 1$   $q$ -кратно вырожденных экситонов. Оставшиеся  $q - 1$  косые экситоны образуют  $(q - 1)/2$  двукратно вырожденных экситонов вследствие четности кулоновского взаимодействия.

В модели вихревых решеток заполнение один электрон на элементарную ячейку отделено щелью от более высоких по энергии состояний и достигается при плотности электронов

$$n_e = \frac{B}{\Phi_0} \frac{q}{p - qL} \quad (16)$$

при целом числе  $L$  квантов потока, даваемых вихрями в элементарной ячейке, и полным потоком с учетом внешнего магнитного поля  $B$ , равным  $(p/q)\Phi_0$ . Рассмотрим поглощение света при некоторых дробных заполнениях уровней Ландау для вихревых решеток с одним и двумя квантами потока, соответствующих дробям, наблюдаемым для квантового эффекта Холла [1]. При заполнении  $n_e = (1/3)(B/\Phi_0)$ ,  $q = 1$ ,  $p = 1$ ,  $L = -2$  имеется только одна линия поглощения. При заполнении  $n_e = (2/3)(B/\Phi_0)$  имеется две возможности:  $q = -2$ ,  $p = 1$ ,  $L = -2$  или  $q = 2$ ,  $p = 1$ ,  $L = -1$ . В обоих случаях будет две линии поглощения. При заполнении  $n_e = (2/5)(B/\Phi_0)$ ,  $q = 2$ ,  $p = 1$ ,  $L = -2$  также будут две линии поглощения. При заполнении  $n_e = (3/7)(B/\Phi_0)$ ,  $q = 3$ ,  $p = 1$ ,  $L = -2$  и заполнении  $n_e = (3/5)(B/\Phi_0)$ ,  $q = -3$ ,  $p = 1$ ,  $L = -2$  будут три линии поглощения. Можно рассмотреть и другие дробные заполнения. Таким образом, экспериментальное наблюдение линий поглощения (или излучения при аннигиляции экситонов) могло бы подтвердить или опровергнуть модель вихревых решеток для дробных заполнений уровней Ландау для двумерных электронных систем в сильном магнитном поле.

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований # 05-02-16553 и # 06-02-16329-а а также программой Отделения физики РАН “Сильно коррелированные электроны в полупроводниках и металлах”. Авторы выражают благодарность В.Ф. Гантмахеру и В.Б. Тимофееву за обсуждение.

1. С. В. Иорданский, Письма в ЖЭТФ **77**, 292 (2003).
2. E. Brown, Phys. Rev **133**, A1038 (1964).
3. J. Zak, Phys. Rev. **134**, A1607 (1964).
4. Е. М. Лифшиц и Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, т. 9, М.: Наука, 2002.
5. Г. Л. Бир и Г. Е. Пикус, *Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках*, М.: Наука, 1972.