

“Темная материя” в кристаллах: объекты, невидимые в низкоэнергетическом рассеянии электронов

А. А. Горбачевич¹⁾

Московский государственный институт электронной техники (технический университет)
124498 Зеленоград, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 28 сентября 2006 г.

После переработки 1 ноября 2006 г.

Продемонстрирована возможность существования протяженных объектов, принципиально необнаружимых в низкоэнергетическом рассеянии электронов. В рамках одномерной модели сильной связи показано, что можно построить пару дефектов, для которых коэффициент прохождения электронов в низкоэнергетическом пределе (в рамках применимости метода эффективной массы) тождественно равен единице. В этом пределе данные объекты описываются не как некоторый тип безотражательного потенциала, а как однородная среда, в которой эффективный размер объекта обращается в нуль, то есть имеет место его коллапс.

PACS: 03.65.Nk, 71.55.Cn, 71.55.Eq, 72.10.Fk

Физика элементарных частиц и физика конденсированного состояния имеют немало аналогий и общих идей [1, 2]. При этом параметры и свойства, которые в физике элементарных частиц представляют собой фундаментальные характеристики частиц, в физике конденсированного состояния могут выступать как характеристики квазичастиц, сформированных в результате взаимодействия обычных электронов [1]. Одна из центральных проблем современного естествознания в целом и, в частности, физики элементарных частиц – природа темной материи, на которую приходится основная часть вещества во Вселенной. В контексте этой проблемы представляется заслуживающим внимания вопрос о возможности существования аналогичных объектов, невидимых с точки зрения традиционных средств наблюдения, в обычных конденсированных средах.

В данной работе показано, что в одномерной кристаллической решетке можно построить протяженные микроскопические объекты, которые обладают аномальной прозрачностью в случае рассеяния электронов – они невидимы в пределе низких энергий. Эти объекты – пары дефектов (скрытые пары дефектов – СПД), характеризующиеся антисимметричными потенциалами, расположенные в неэквивалентных узлах на определенном расстоянии и в специальном порядке. Коэффициент прозрачности СПД тождественно равен единице без какого-то ни было фазового фактора, а связанные состояния отсутствуют. Этот факт принципиально отличает описанные объекты от

хорошо известных безотражательных потенциалов. При описании кристалла в континуальном пределе в рамках метода эффективной массы (МЭМ) эффективный размер объекта может существенно отличаться от его истинного микроскопического размера. Аномальная прозрачность СПД соответствует коллапсу эффективного размера пары дефекта в континуальном пределе. Одиночный дефект в континуальном пределе, как известно, описывается δ -функционным потенциалом. Однако СПД в этом пределе представляется бесструктурной однородной средой – как будто два дефекта аннигилируют друг с другом. Без использования аппроксимации МЭМ данный микроскопический объект также может быть характеризован эффективным размером, который в этом случае становится зависящим от энергии. При некотором значении энергии этот размер обращается в нуль и появляется резонанс в рассеянии электронов нового типа, проявляющийся в отсутствии электронного отражения. Рассмотрим одномерную модель в приближении сильной связи с удвоением периода решетки как по связям (междуузлиям), так и по узлам. Различные атомы в элементарной ячейке обозначены индексом j ($j = 1, 2$). Пускай два дефекта (примеси) будут расположены в узлах $M1$ и $M2$, занимая места атомов 1 и 2 основной решетки. Гамильтониан модели имеет вид

$$\hat{H} = \sum_{j=1,2} \sum_{n_1, n_2} [\varepsilon_j C_j^\dagger C_{j n_j} - C_{1 n_1}^\dagger (t_+ C_{2 n_1+1} + t_- C_{2 n_1-1}) + \varepsilon_j^* C_{Mj}^\dagger C_{Mj} + \text{h.c.}] \quad (1)$$

¹⁾e-mail: aag@qdn.miee.ru

Здесь $C_{j n_j}^\dagger (C_{j n_j})$ – оператор рождения (уничтожения) электрона в узле n_j , $n_1 = 2m$, $n_2 = 2m + 1$ (m – целое число), $\varepsilon_{1,2}$ – энергии атомов в объемном материале, $\varepsilon_{1,2}^*$ – атомные энергии дефектов и $t_\pm = t_1 \pm t_2$ – чередующиеся интегралы перескока. Интегралы перескока для дефектов приняты такими же, как и в объеме. Модель (1) описывает возникновение $\Delta_{3(4)}$ дырочных состояний дырки из атомных p -орбиталей в центре зоны Бриллюэна (ЗБ) в полупроводниках со структурой цинковой обманки [3, 4], а также модель Пайерлса с удвоением периода решетки как по связям, так и по узлам (асимметричная модель Пайерлса). Упрощенная версия этой модели с $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (симметричная модель Пайерлса) успешно использовалась для описания электронных состояний в полиацетиле (ПА) [5]. Энергетический спектр модели (1) без дефектов имеет две ветви (нижнюю (L) и верхнюю (U)):

$$E_{U,L}(k) = \varepsilon_0 \pm \sqrt{\delta^2 + 4t_1^2 \cos^2(ka) + 4t_2^2 \sin^2(ka)} = \varepsilon_0 \pm E(k). \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, $\delta_0 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$, a – межатомное расстояние, которое мы принимаем одинаковым для смежных связей. При $t_2 > t_1$ экстремум энергетической зоны находится в центре ЗБ. Волновые функции для верхней ветви имеют вид $c_{1,2k} U = u_k, -v_k e^{-i\varphi_{1,2}(k)}$, где фазовые факторы связаны друг с другом выражением

$$\varphi_2(k) - \varphi_1(k) = \vartheta(k), \quad \vartheta(k) = \arctan(\theta \tan(ka)); \quad (3)$$

здесь $\theta = t_2/t_1$. Коэффициенты u и v имеют стандартную форму коэффициентов канонического преобразования: $u_k, v_k = [(1/2)(1 \pm \delta/E(k))]^{1/2}$ [6]. Для нижней ветви решение можно получить перестановкой: $u \rightarrow -v, v \rightarrow u$. Рассмотрим решение задачи рассеяния для гамильтониана (1) в форме

$$c_{1,2n} = c_{1,2k} e^{ikna} + r c_{1,2-k} e^{-ikna}, \quad n < M_1;$$

$$c_{1,2m} = t c_{1,2k} e^{ikma}, \quad m > M_2.$$

После некоторых алгебраических преобразований мы получаем следующие выражения для коэффициентов отражения (r) и пропускания (t) в верхней зоне:

$$r = -e^{2ikM_1 - 2i\varphi_a} \times \frac{A_k \sin[L_{\text{eff}}(k)k] - \Delta_k + U_k \cos[L_{\text{eff}}(k)k]}{\Delta_1 \Delta_2 u_k v_k \sin[L_{\text{eff}}(k)k] - B_k}, \quad (4)$$

$$t = -e^{-iL_{\text{eff}}(k)k} \frac{2iu_k v_k U_k^2}{\Delta_1 \Delta_2 u_k v_k \sin[L_{\text{eff}}(k)k] - B_k}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= \Delta_1 \Delta_2 u_k v_k + i\Delta_k - U_k, \\ B_k &= (\Delta_{k+} + 2iu_k v_k U_k) U_k e^{-iL_{\text{eff}}(k)k}, \\ \Delta_{1,2} &= \varepsilon_{1,2}^* - \varepsilon_{1,2}, \quad \Delta_{k\pm} = \Delta_1 v_k^2 \pm \Delta_2 u_k^2, \\ U_k &= t_2 \sin[\vartheta(k)] \cos(ka) - t_1 \cos[\vartheta(k)] \sin(ka). \end{aligned}$$

Здесь $\Delta_{1,2} > 0$ (< 0) соответствует доноро-(акцептор-) подобной примеси. В (4), (5) введен эффективный размер пары дефекта:

$$L_{\text{eff}}(k) = L_0 - \frac{1}{k} \vartheta(k), \quad (6)$$

где $L_0 = (M_2 - M_1)a$. При условии

$$\Delta_1 v_k^2 = -\Delta_2 u_k^2 \quad (7)$$

как Δ_{k+} , так и последний член в числителе (4) обращаются в нуль, и коэффициент отражения оказывается пропорциональным $\sin[L_{\text{eff}}(k)k]$. При $L_{\text{eff}}(k) = 0$ возникает резонанс: $r = 0$ и $t = 1$. В симметричной модели Пайерлса ($\delta = 0$) параметры в условии (7) не зависят от энергии и оно принимает вид $\Delta_1 = -\Delta_2$. В асимметричной модели Пайерлса коэффициенты u_k и v_k в (7) зависят от энергии, и резонанс наблюдается, только если условия (7) и $L_{\text{eff}} = 0$ выполняются при одной и той же энергии. В случае

$$ka \ll 1, \quad \vartheta(k) \approx \theta ka \ll 1, \quad (8)$$

то есть при выполнении условия применимости МЭМ, имеем $L_{\text{eff}}(k) = L_{\text{eff}} = L_0 - a\theta$. При этом функция $\sin[L_{\text{eff}}(k)k]$ в (4) превращается в $\sin[(L_0 - a\theta)k]$. Следовательно, при достаточно большом значении θ (или достаточно малом значении L_0), таком, что $L_{\text{eff}} = 0$, коэффициент отражения r тождественно равен нулю при всех значениях k в пределах применимости МЭМ.

Для $t_1 > t_2$ (случай ПА), экстремумы энергетических зон лежат на границах ЗБ. Континуальный предел (МЭМ) для такой модели соответствует малому волновому вектору, отсчитанному от точки экстремума $k = \pm\pi/a$. Можно показать, что для таких значений волнового вектора формулы (4), (5) сохраняются со следующими модификациями: интегралы перескока t_1 и t_2 меняются местами (при этом параметр $\theta = t_1/t_2$), а коэффициент отражения приобретает незначительный фазовый фактор. Зависимость эффективной длины от волнового вектора $L_{\text{eff}}(k)$ показана на рис.1. Параметр θ при описании зонной структуры ПА обычно принимается равным 7.1 [5]. В элементах IV группы и соединениях A_3B_5 этот параметр изменяется от 2 до 3 [3, 7].

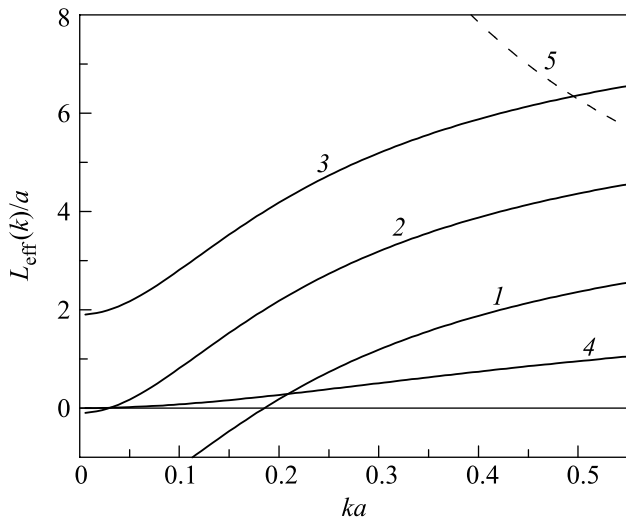


Рис.1. Зависимость эффективного расстояния между дефектами от волнового вектора $L_{\text{eff}}(k)$. Кривая 1 – $\theta = 7.1$, $L_0 = 5$; 2 – $\theta = 7.1$, $L_0 = 7$; 3 – $\theta = 7.1$, $L_0 = 9$; 4 – $\theta = 3$, $L_0 = 3$. Кривая 5 – $kL_{\text{eff}}(k) = \pi$

Для понимания физической природы описанного явления рассмотрим континуальный предел, когда точечный дефект может быть представлен δ -функциональным потенциалом. В рамках МЭМ для двух δ -функций, расположенных в точках x_1 и x_2 , можно показать, что коэффициент отражения r точно соответствует формуле (4) в случае (8) с $L_{\text{eff}}(k)$, замененной на $x_2 - x_1$. Для равных по мощности и противоположных по знаку δ -потенциалов коэффициент отражения r показывает обычный резонанс на квазиуровне в непрерывном спектре при $k(x_2 - x_1) = \pi$, но тождественно обращается в нуль только если $x_1 = x_2$. Следовательно, в точности аналогичное поведение коэффициента отражения в дискретной модели (1) может интерпретироваться, как если бы эффективный размер пары дефектов в континуальном пределе определялся не истинным расстоянием между дефектами в микроскопической модели L_0 , а эффективной длиной $L_{\text{eff}}(k)$ (6), которая может обращаться в нуль при некоторых значениях параметров системы.

Необходимо отметить, что одномерные объекты с $r \equiv 0$ (безотражательные потенциалы) хорошо известны в физике [8, 9]. Однако коэффициент пропускания безотражательного потенциала обладает фазовым фактором, отличным от нуля: $t = e^{i\phi}$. Фаза ϕ определяется положением полюсов амплитуды рассеяния в комплексной плоскости волнового вектора, который связан с энергиями связанных состояний. При этом фаза коэффициента пропускания, так же как и связанные состояния, может, в принципе, быть использована для обнаружения безотражательного по-

тенциала. Потенциалы с нулевым эффективным размером, описанные в данном разделе, представляют собой гораздо более скрытые объекты. Коэффициент пропускания t (5), при условии $L_{\text{eff}}(k) = 0$ (при $\Delta_+ = 0$), равен единице тождественно без какого-либо фазового фактора. Связанные состояния также отсутствуют: можно показать, что дисперсионное соотношение для энергии связанных состояний $r^{-1}(k = ik) = 0$ не имеет нетривиальных решений при $L_{\text{eff}}(k) = 0$. Следовательно, СДП полностью невидимы для наблюдения в пределе больших длин волны. В этом пределе они идентичны бесструктурной однородной среде и, в этом смысле, не имеют нетривиального оптического аналога. Однако заметим, что аналогичные объекты могут быть построены и в фотонных кристаллах с диэлектрической проницаемостью, периодически изменяющейся в пространстве. Если учесть отклонения от приближения МЭМ (непараболичность), СДП проявляют себя посредством широких резонансов в рассеянии при аномально низких энергиях (рис.1).

Рассмотрим два дефекта, расположенных в эквивалентных узлах решетки M_1 и M_2 (например, оба занимают в решетке места атомов 1-го сорта) с энергиями $\epsilon_1^* = \epsilon_1 + \Delta_1$ и $\epsilon_2^* = \epsilon_1 + \tilde{\Delta}_1$, соответственно. Можно показать, что коэффициент отражения \tilde{r} в этом случае получается из выражения (4) в результате следующей подстановки:

$$\tilde{r}(k) = r(k, \Delta_2 u_k \rightarrow \tilde{\Delta}_1 v_k, U_k v_k \rightarrow U_k u_k, L_{\text{eff}}(k) \rightarrow L_0). \quad (9)$$

Главное отличие между (9) и (4) – то, что в (9) вместо эффективной длины $L_{\text{eff}}(k)$ фигурирует истинная микроскопическая длина $L_0 = (M_2 - M_1)a$. Следовательно, любые аномалии, связанные с возможным коллапсом пары дефектов в континуальном пределе, в этом случае отсутствуют.

Квадрат модуля коэффициента отражения $|r|^2$ в симметричной модели Пайерлса с антисимметричным потенциалом дефекта как функция волнового вектора показан на рис.2. Параметры кривой 4 удовлетворяют условию коллапса дефекта $L_0 = \theta$ в пределе $ka \ll 1$. В этом случае $r(k=0) = 0$. Все остальные кривые стремятся к единице при $k \rightarrow 0$. На рис.2 можно видеть, что даже в модели, где $L_{\text{eff}}(k)$ не обращается в нуль (кривая 3), уменьшение размера пары дефектов приводит к образованию минимума $r(k)$ при малом значении энергии. Кривая 5 характеризуется теми же параметрами, что и кривая 2, за исключением положения правого дефекта, который сдвинут на половину периода решетки вправо. Резонанс, наблюдаемый на кривой 3 при $ka = 0.495$ –

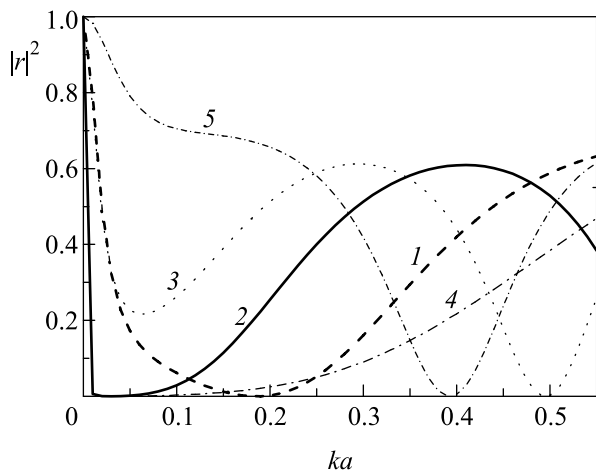


Рис.2. Зависимость коэффициента отражения от волнового вектора в симметричной модели Пайерлса с $\delta = 0$, $t_1 = 3.2\varepsilon V$ ($t_1 > t_2$). Для кривых 1–4 остальные параметры и маркировка те же, что и на рис.1. Кривая 5 соответствует паре дефектов в эквивалентных узлах решетки (9), $\theta = 7.1$, $L_0 = 8a$

резонанс на квазиуровне в непрерывном спектре, соответствующий пересечению кривых 3 и 5 на рис.1. Резонанс на кривой 5 – также резонанс на квазиуровне при $k = \pi/L_0$ ($L_0 = 8a$).

Результаты, полученные выше, косвенно указывают на то, что положение дефекта в непрерывной модели может существенно отличаться от его фактического микроскопического положения. Это утверждение может быть доказано непосредственно. Рассмотрим общую задачу определения координаты микроскопической неоднородности в кристалле при переходе к континуальному пределу. Точечный дефект при этом представляет собой частный случай гетероперехода с инородным атомом. Гетеропереход в рамках МЭМ может быть characterized посредством матрицы переноса \hat{T} , которая связывает волновые функции и их производные по обе стороны гетероперехода, расположенного в точке x_0 [10, 11]:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \nabla\varphi \end{pmatrix}_+ = \hat{T} \begin{pmatrix} \varphi \\ \nabla\varphi \end{pmatrix}_- = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \nabla\varphi \end{pmatrix}_- \quad (10)$$

Параметры матрицы переноса \hat{T} могут быть определены в приближении сильной связи путем экстраполяции и сшивки узельных амплитуд на границе [10, 12] или же рассчитаны методом псевдопотенциала [13]. Как в одном, так и в другом случаях координата гетероперехода считается известной. Однако оказывается, что значение координаты гетероперехода x_0 (наряду с параметрами матрицы рассеяния \hat{T}) можно определить из сравнения данных рассеяния (r

и t), вычисленных в микроскопической и в континуальной (МЭМ) моделях. Для этого следует представить данные рассеяния в виде рядов по степеням волнового вектора и приравнять коэффициенты при членах одинакового порядка в выражениях для r и t , вычисленные в двух моделях. В частности, параметр T_{21} может быть получен из выражения для коэффициента пропускания при нулевом волновом векторе падающей волны: $T_{21} = -2ikt^{-1}_{k \rightarrow 0}$. Можно показать, что для гетерограницы двух различных материалов и отличном от нуля (и не малом) T_{21} в (10) число неизвестных параметров больше, чем число уравнений, следующих из процедуры экстракции. В результате определение координаты гетероперехода x_0 возможно только в случае $T_{21} \rightarrow 0$. Иная ситуация имеет место для единичного дефекта. В этом случае существует дополнительное условие, обусловленное симметрией системы: $T_{11} = T_{22} = 1$, и число неизвестных параметров уменьшается на единицу.

Пусть дефект в микроскопической модели расположен в узле M_1 . Координату гетероперехода в континуальной модели запишем как $x_0 = M_1 a + \Delta x_0$. В континуальной модели (10) разложение коэффициента отражения плоской волны $e^{ik(x-\delta)}$ (δ – фазовый фактор), падающей слева, в ряд по параметрам волнового вектора имеет вид

$$r \approx -e^{ikM_1 a} [1 + 2ik(\frac{1}{T_{21}} + \Delta x_0 - \delta) + \dots] \quad (11)$$

Для коэффициента отражения r в микроскопической модели (1) в случае дефекта, замещающего атом 1-го сорта исходного материала, имеем:

$$r = -e^{2i(kM_1 a - \varsigma_1)} \Delta_1 v_k / (\Delta_1 v_k - 2iu_k U_k), \quad (12)$$

где параметры Δ_1 , u_k , v_k и U_k – те же самые, как и в (4). Из выражения для коэффициента пропускания можно получить $T_{21} = v_0 \Delta_1 t_1 / u_0 (t_2^2 - t_1^2) a$ (считаем, что $t_2 > t_1$). Из сравнения выражения (11) с аналогичным разложением выражения (12) по степеням ka для координаты дефекта, замещающего атом сорта 1, находим: $x_{01}^{(1)} - \delta = M_1 a - \varsigma_1$. Эта же процедура, выполненная для дефекта, замещающего атом 2-го сорта, расположенный в узле M_2 , дает: $x_{02}^{(2)} - \delta = M_2 a - \varsigma_2$ (здесь $\varsigma_{1,2}$ – фазы узельных амплитуд (3)). Взаимное вычитание $x_{02}^{(2)}$ и $x_{01}^{(1)}$ позволяет устранить неопределенный параметр δ . В результате для эффективной длины получаем: $L_{\text{eff}} = x_{02}^{(2)} - x_{01}^{(1)} = (M_2 - M_1 - \theta)a$, то есть то же самое выражение, что и (6) в пределе (8). Если же оба дефекта находятся в эквивалентных позициях, можно показать, что эффективное расстояние между ними в континуальном пределе в точности совпадает с истинным расстоянием

между ними в исходной микроскопической модели: $x_{02}^{(1)} - x_{01}^{(1)} = (M_2 - M_1)a$. Этот факт и объясняет существенное различие между выражениями для коэффициента отражения (4) и (9), которые описывают рассеяние на парах дефектов, размеры которых отличаются только на половину периода решетки.

Фазовый фактор δ плоской волны, распространяющейся в объемном материале, можно установить, рассмотрев вспомогательную задачу о рассеянии на гетеропереходе, в состав которого входит интересующий нас объемный материал. В этом случае дополнительная информация может быть получена из разложения по степеням волнового вектора выражения для r' – коэффициента отражения для волны, падающей на гетеропереход справа. В результате получаем $\delta = (\zeta_1 + \zeta_2)/2$, а для координаты дефекта имеем $x_0^{(1,2)} = Ma \pm \theta/2$. Следовательно, дефекты, расположенные в эквивалентных узлах, сдвигаются в континуальном пределе в одном и том же направлении, а эффективное расстояние между ними не меняется по сравнению с микроскопической моделью. Дефекты, расположенные в неэквивалентных узлах, в континуальном пределе смещаются навстречу друг другу и могут коллапсировать. Например, состояния Δ_3 и Δ_4 в полупроводниках IV группы и соединениях A_3B_5 отличаются знаком θ . Поэтому коллапс дефекта для состояния Δ_3 будет сопровождаться удвоением эффективного размера дефекта для состояния Δ_4 и наоборот.

Таким образом в настоящей работе описан новый микроскопический объект – СПД, невидимый в низкоэнергетическом рассеянии электронов. Заметим, что СПД могут быть хаотически распределены в пространстве и перекрываться. Тем не менее, в силу линейности задачи рассеяния низкоэнергетическое рассеяние носителей в такой системе также будет отсутствовать, что означает возможность существования неупорядоченных одномерных проводников без локализации. Физическая природа описанного эффекта связана с пространственной асимметрией модели (1). Эта микроскопическая асимметрия служит причиной асимметричного искажения волновой функции дефектом (по отношению к волновой функции в воображаемой симметричной модели, в которую переходит исходная асимметричная модель при обращении параметра асимметрии в нуль). Асимметричное искажение испытывают как истинная микроскопическая волновая функция, так и ее огибающая. Между тем в рамках МЭМ информация о микроскопической симметрии среды отсутствует – асимметричные на микроскопическом уровне модели, связанные друг с другом операцией инверсии, описываются в континуальном приближении одинаково.

Следовательно, единственный способ описать в континуальном пределе асимметричные искажения волновой функции, вызванные дефектом, в микроскопической модели – сдвинуть положение дефекта относительно его положения в симметричном случае. Как нетрудно показать, положение дефекта в микроскопической симметричной модели совпадает с его положением в континуальном пределе. Данный механизм представляется универсальным и предполагает возможность существования разнообразных “невидимых” объектов в конденсированных средах. Другие объекты этого типа – квантовые ямы в модели (1) с инородными атомами на гетеропереходах и пары дефектов в обобщенной модели Кронига–Пенни без центра инверсии – будут описаны в отдельной статье. Вопрос о возможности существования подобных объектов в моделях с размерностью выше единицы в настоящее время неясен и требует изучения.

Косвенным указанием на существование СПД могла бы служить аномально низкая проводимость квазиодномерного проводника, например, полиацетилена, содержащего донорные и акцепторные примеси. Однако подобные эксперименты автору в настоящее время неизвестны. Благоприятные условия для формирования СПД в таких материалах могут быть созданы в результате отжига путем пропуска электрического тока. В областях, где в результате хаотического перераспределения дефектов происходит образование повышенной концентрации СПД, сопротивление уменьшается и, соответственно, уменьшается выделение джоулевого тепла. В результате тепло выделяется, в основном, в областях с пониженной концентрацией СПД, где оно способствует усилению миграции дефектов и формированию СПД. Более прямым способом создания СПД будет использование сверхрешеток со сложной элементарной ячейкой, в которых периодический потенциал с периодом, соответствующим нескольким периодам решетки исходного материала, формируется последовательностью квантовых барьеров и ям, выращенных обычными эпитаксиальными методами. В такой системе вполне может быть реализована ситуация, соответствующая упомянутой выше модели Кронига–Пенни с дефектами. Другой способ воспроизвести физическую ситуацию, соответствующую модели Кронига–Пенни, состоит в использовании электронных волноводов, полученных в двумерном электронном газе методами нанолитографии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства образования и науки РФ.

-
1. R. Laughlin, Rev. Mod. Phys. **71**, 863 (1999).
 2. G. E. Volovik, *The universe in a helium droplet*, Oxford, Clarendon Press, 2003.
 3. П. Ю. М. Кардона, *Основы физики полупроводников*, М.: Физматлит, 2002.
 4. В полупроводниковых обозначениях [3]: $t_1 \rightarrow V_{xx}$ и $t_2 \rightarrow V_{xy}$, а индексы 1 и 2 обозначают анион и катион, соответственно.
 5. A. J. Heeger, S. Kivelson, J. R. Schrieffer, and W.-P. Su, Rev. Mod. Phys. **60**, 781 (1988).
 6. Амплитуды $c_{k, k+\pi/a}$, обычно используемые в модели Пайерлса, имеют вид: $c_{k, k+\pi/a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{1k} \pm c_{2k})$.
 7. P. Vogel, H. P. Hjalmarson, and J. D. Dow, J. Phys. Chem. Solids **44**, 365 (1983).
 8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, М.: Наука, 1974.
 9. C. Mora, R. Eger, and A. O. Gogolin, Phys. Rev. A **71**, 052705 (2005).
 10. T. Ando and S. Mori, Surf. Sci. **113**, 124 (1982); T. Ando, S. Wakahara, and H. Akera, Phys. Rev. B **40**, 11609 (1989).
 11. I. V. Tokatly, A. G. Tsibizov, and A. A. Gorbatsevich, Phys. Rev. B **65**, 165328 (2002).
 12. E. L. Ivchenko, A. Yu. Kaminski, and U. Rossler, Phys. Rev. B **54**, 5852 (1996); Е. Л. Ивченко, А. А. Торопов и П. Вуазен, ФТТ **40**, 1925 (1998).
 13. B. A. Foreman, Phys. Rev. Lett. **81**, 425 (1998).