

# Пространственно неоднородные состояния носителей заряда в графене

Т. Я. Тудоровский, А. В. Чаплик<sup>1)</sup>

Институт физики полупроводников Сибирского отд. РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 16 октября 2006 г.

После переработки 31 октября 2006 г.

Исследовано взаимодействие двумерных квазичастиц с линейной дисперсией  $E = \pm u|p|$  (графен) с примесными потенциалами. Показано, что в одномерной потенциальной яме (квантовая проволока) имеются дискретные уровни, отвечающие локализованным состояниям, тогда как в двумерной яме (квантовая точка) таких состояний нет. Найдено сечение рассеяния электронов (дырок) графена на аксиально симметричной потенциальной яме, и показано, что при неограниченном возрастании энергии частицы сечение стремится к постоянной. Выведен эффективный гамильтониан для искривленной квантовой проволоки графена.

PACS: 73.23.-b, 73.63.-b, 81.05.Uw

**1. Введение.** Моноатомный слой атомов углерода, образующих гексагональную решетку (графен), исследуется сейчас весьма интенсивно [1–3]. “Конический” закон дисперсии квазичастиц (название заимствовано из аналогичной трехмерной модели бесщелевого полупроводника) приводит к кардинальным отличиям их динамических характеристик от соответствующих характеристик частиц конечной массы. Плотность электронных состояний в графене обращается в нуль линейно по энергии  $E$ , отсчитываемой от конической точки, то есть быстрее, чем для обычной частицы в трехмерном случае ( $\sqrt{E}$ ). Это дает основания ожидать, что образование связанных состояний в потенциальных ямах будет затруднено.

В настоящем письме на примере точно решаемых моделей одномерной и двумерной прямоугольных ям мы исследуем возможность локализации квазичастиц, описываемых гамильтонианом

$$\hat{H} = u\sigma\hat{p}, \quad (1)$$

где  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  – матрицы Паули,  $\hat{p} = -i\hbar\nabla$  – оператор импульса,  $u$  – характерная скорость (в графене  $u \sim 10^6$  м/с). Оказывается, что квантовая проволока (одномерная локализация), “сделанная” из графена, возможна, тогда как квантовая точка и водородоподобный донор (акцептор) – нет. Будет выведен эффективный 1D гамильтониан искривленной квантовой проволоки и будет показано, что геометрический потенциал также существенно отличается от случая частиц с квадратичной дисперсией.

Взаимодействие квазичастиц, описываемых гамильтонианом (1), с электростатическими потенциалами было предметом нескольких недавних публикаций. В работе Чаянова и Фалько [4] найден коэффициент прохождения электронов (дырок) графена сквозь одномерный барьер типа  $p$ – $n$ -перехода. Те же авторы показали в работе [5], что фриделевские осцилляции плотности заряда вблизи примесного атома в графене существенно отличаются от случая обычной двумерной электронной системы с параболическим законом дисперсии. Связанные состояния в одномерной симметричной прямоугольной яме исследованы в работе [6]. Мы приведем ниже решение этой, а также более общей задачи для несимметричной ямы, так как оно потребуется нам для вывода эффективного одномерного гамильтониана искривленной квантовой проволоки.

**2. Одномерная потенциальная яма.** Движение электронов в графеновом волноводе, представляющем собой двумерную полосу с прямой осью, описывается уравнением

$$u(\sigma\hat{p})\Psi + v(y)\Psi = E\Psi, \quad (2)$$

где  $v(y)$  – потенциал, удерживающий частицу в волноводе (далее полагаем  $u = \hbar = 1$ ). Будем искать решение в виде  $\Psi(x, y) = \chi(y) \exp(ipx)$ , где  $\chi(y) = (\chi_1, \chi_2)$  – двухкомпонентный спинор, компоненты которого удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial}{\partial y} + p\right)\chi_2 &= (E - v(y))\chi_1, \\ \left(\frac{\partial}{\partial y} + p\right)\chi_1 &= (E - v(y))\chi_2. \end{aligned} \quad (3)$$

<sup>1)</sup>e-mail: chaplik@isp.nsc.ru

Исключая  $\chi_2$ , находим:

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} + p^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \ln(E - v(y)) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} + p \right) \right] \chi_1 = (E - v(y))^2 \chi_1. \quad (4)$$

Представляя функцию  $\chi_1$  в виде  $\sqrt{E - v(y)} \tilde{\chi}_1$ , получим

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} + p^2 - (E - v(y))^2 + \frac{v''(y)/2 - v'(y)p}{E - v(y)} + \frac{3(v'(y))^2}{4(E - v(y))^2} \right] \tilde{\chi}_1 = 0. \quad (5)$$

Уравнение для функции  $\chi_2 = \sqrt{E - v(y)} \tilde{\chi}_2$  получается заменой  $p \rightarrow -p$ .

Рассмотрим потенциал  $v(y)$  в виде ступенчатой функции:  $v(y) = 0$  при  $y < -a$ ,  $v(y) = -v_0$  при  $|y| < a$ ,  $v(y) = -v_1$  при  $y > a$ . В каждой из областей уравнение (5) сводится к

$$-\partial^2 \chi_1 / \partial y^2 = [(E - v_i)^2 - p^2] \chi_1,$$

где  $v_i = 0$  при  $y < -a$ ,  $v_i = -v_{0,1}$  при  $|y| < a$  и  $y > a$  соответственно. Решения последнего уравнения, убывающие при  $y \rightarrow \pm\infty$ , имеют вид  $\chi_1 = A_1 e^{\kappa y}$  при  $y < -a$ ,  $\chi_1 = B_1 \sin qy + B_2 \cos qy$  при  $|y| < a$ ,  $\chi_1 = A_3 e^{-\kappa_1 y}$  при  $y > a$ . Здесь  $\kappa = \sqrt{p^2 - E^2}$ ,  $q = \sqrt{(E + v_0)^2 - p^2}$ ,  $\kappa_1 = \sqrt{p^2 - (E + v_1)^2}$ .

Условия сшивки  $\chi_i|_{y=\pm a-0} = \chi_i|_{y=\pm a+0}$ ,  $i = 1, 2$ , приводят к следующему уравнению, определяющему спектр  $E = E^\nu(p)$ , где  $\nu$  – номер подзоны поперечного квантования:

$$\left[ 1 - \frac{\kappa + p}{E} \frac{\kappa_1 - p}{E + v_1} + \frac{p}{E + v_0} \frac{\kappa_1 - p}{E + v_1} - \frac{\kappa + p}{E} \frac{p}{E + v_0} \right] \sin(2qa) - \frac{q}{E + v_0} \left[ \frac{\kappa_1 - p}{E + v_1} + \frac{\kappa + p}{E} \right] \cos(2qa) = 0. \quad (6)$$

В случае симметричной ямы  $v_1 = 0$ ,  $\kappa_1 = \kappa$ , уравнение (6) упрощается:

$$[E(E + v_0) - p^2] \sin(2qa) - \kappa q \cos(2qa) = 0. \quad (7)$$

Ветви  $E^\nu(p)$  для симметричной ямы показаны на рис.1. Заметим, что у уравнения (7) всегда есть решение  $E(p) = |p| - v_0$ , то есть  $q = 0$ . Однако эта ветвь спектра не физическая, так как она соответствует волновой функции, тождественно равной нулю.

Исследование уравнения (7) приводит к условию вещественности  $q$ , которое вместе с очевидным условием вещественности  $\kappa$  определяет область, занимаемую дискретным спектром  $\max\{-|p|, |p| - v_0\} < E <$

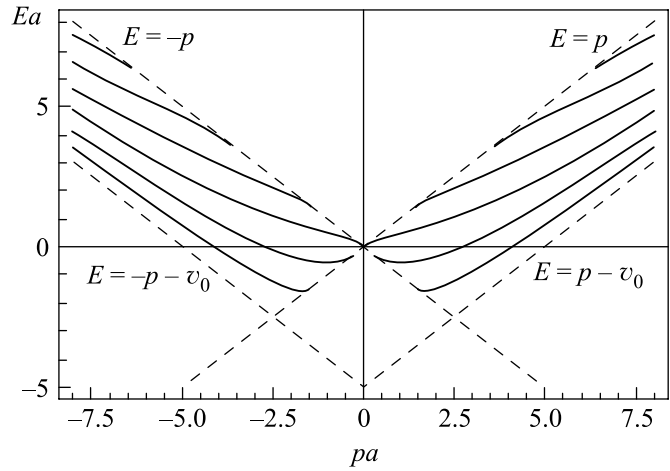


Рис.1. Связанные уровни  $E(p)$  в одномерной симметричной прямоугольной яме;  $v_0 a = 5$ . Пунктирными линиями показаны границы области, занимаемой дискретным спектром

$|p|$ . Отсюда, в частности, следует, что  $E > -v_0/2$ . Легко вычислить энергию в следующих предельных случаях:

$$1) |p| \ll v_0, \cos(2v_0 a) \neq 0 : \quad E(p) = |p| \operatorname{sign}\{\sin(2v_0 a)\} \cos(2v_0 a), \quad (8)$$

$$2) |p| \ll v_0, \cos(2v_0 a) = 0 : \quad E(p) = p^2 / v_0, \quad (9)$$

$$3) v_0 \rightarrow 0 \text{ или } a \rightarrow 0 : \quad E = |p|(1 - 2v_0^2 a^2 + \dots). \quad (10)$$

В мелкой несимметричной яме уровни отсутствуют при любых  $p$ . Связанных состояний нет также в несимметричной яме произвольной глубины при достаточно малых  $p$ .

**3. Эффективное одномерное уравнение в адиабатически искривленной полосе.** Рассмотрим полосу с искривленной осью, заданной уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{R}(x)$ ; считаем, что полоса искривлена в своей плоскости<sup>2)</sup>. Здесь  $\mathbf{R}(x) = (R_1(x), R_2(x))$  – гладкая вектор-функция,  $x$  – натуральный параметр на оси (длина, отсчитанная от некоторой точки),  $|d\mathbf{R}/dx| = 1$ . Обозначим  $\mathbf{n}(x) = (n_1(x), n_2(x))$  – единичный вектор, нормальный  $d\mathbf{R}/dx$ . В окрестности

<sup>2)</sup> После того, как эта статья была направлена в печать, мы узнали о работе Пахоса и Стоуна [7], в которой исследуется электронный спектр графенового листа, содержащего дефекты типа 5- или 7-угольников и свернутого без растяжений в произвольную поверхность (в частности, это может быть молекула фуллерена или нанотрубка). В отличие от [7], мы рассматриваем *плоскую* квазиодномерную искривленную полосу и выводим выражение для соответствующего геометрического потенциала. Такая задача в работе [7] не ставится.

оси полосы определены криволинейные координаты  $x, y$ , заданные равенством  $\mathbf{r} = \mathbf{R}(x) + y\mathbf{n}(x)$ . Уравнение (2) в криволинейных координатах приводится к виду

$$\left[ \frac{(\sigma \mathbf{R}')}{\sqrt{1-ky}} \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{\sqrt{1-ky}} + (\sigma \mathbf{n}) \left( -i \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{ik(\sigma \mathbf{n})}{2(1-ky)} + v(y) \right] \tilde{\Psi} = E\tilde{\Psi}, \quad (11)$$

где  $k(x)$  – кривизна оси волновода в точке  $x$ ,  $\tilde{\Psi} = (1-ky)^{1/2}\Psi$ . Учтем теперь, что полоса искривлена адиабатически, то есть формально  $k \rightarrow 0$ . Следуя идее [8], решение последнего уравнения ищем в виде  $\Psi^\nu(x, y) = \hat{\chi}^\nu \psi^\nu(x)$ ,  $\hat{\chi}^\nu = (\hat{\chi}_1^\nu, \hat{\chi}_2^\nu)$  – двухкомпонентный вектор-оператор, а скалярная волновая функция  $\psi^\nu(x)$  удовлетворяет эффективному уравнению Шредингера

$$\hat{L}^\nu \psi^\nu(x) = E\psi^\nu(x). \quad (12)$$

Разложим оператор  $\hat{L}$  по степеням кривизны  $\hat{L}^\nu = \hat{H}_{\text{eff}}^\nu + \hat{L}_1^\nu + \dots$ . Будет показано, что оператор  $\hat{H}_{\text{eff}}^\nu = H_{\text{eff}}^\nu(-i\partial/\partial x)$  не зависит от  $x$ . Из [9] следует, что  $H_{\text{eff}}^\nu(p)$  есть собственное значение следующей задачи:

$$\left[ (\sigma \mathbf{R}')p + (\sigma \mathbf{n}) \left( -i \frac{\partial}{\partial y} \right) + v(y) \right] \chi^\nu(p, x, y) = H_{\text{eff}}^\nu(p) \chi^\nu(p, x, y), \quad (13)$$

где  $p$  – параметр ( $c$ -число),  $\chi^\nu = (\chi_1^\nu, \chi_2^\nu)$ . Заменой  $\tilde{\chi}_2^\nu = (n_2 - in_1)\chi_2^\nu$  сведем (13) к (3):

$$\left[ p - \frac{\partial}{\partial y} \right] \tilde{\chi}_2^\nu = (H_{\text{eff}}^\nu(p) - v(y)) \chi_1^\nu, \quad (14)$$

$$\left[ p + \frac{\partial}{\partial y} \right] \chi_1^\nu = (H_{\text{eff}}^\nu(p) - v(y)) \tilde{\chi}_2^\nu.$$

Отсюда  $H_{\text{eff}}^\nu(p) = E^\nu(p)$ , то есть  $H_{\text{eff}}^\nu$  не зависит от  $x$ . Выберем функции  $\chi_1^\nu, \tilde{\chi}_2^\nu$  вещественными. Тогда из общих формул [9] и соотношения  $\langle (\chi^\nu)^\dagger (\sigma \mathbf{n}) \chi^\nu \rangle_y = 0$  следует, что

$$\hat{L}_1^\nu = [k(x), (2K(\hat{p})\hat{p} + Q(\hat{p}))]_+, \quad (15)$$

$$K(p) = \langle \chi_1^\nu y \tilde{\chi}_2^\nu \rangle_y, \quad Q(p) = \langle \chi_1^\nu \tilde{\chi}_2^\nu \rangle_y.$$

Здесь  $\hat{p} = -i\partial/\partial x$ ,  $[\cdot, \cdot]_+$  означает антикоммутатор, а  $\langle \cdot \rangle_y$  – интегрирование по  $y$ . Для четного потенциала  $K(p) = 0$ .

**3.1. Эффективное уравнение для прямоугольной ямы при малых  $|p|$ .** Для симметричной прямоугольной ямы при малых продольных импульсах можно воспользоваться дисперсионным соотношением (8). Далее находим  $Q(0) = \text{sign}\{\sin(2v_0 a)\} \text{sign}\{\hat{p}\} \cos(2v_0 a)/2$ . Эффективное

одномерное уравнение для малых импульсов принимает вид

$$\text{sign}\{\sin(2v_0 a)\} \text{sign}\{\hat{p}\} \left( -i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{k(x)}{2} \right) \psi = E\psi. \quad (16)$$

Таким образом, геометрический потенциал для квазичастиц имеет вид  $k(x)/2$  и, как видно из (16), связанные состояния в нем невозможны.

**4. Цилиндрически симметричный потенциал.** Рассмотрим уравнение (2) в цилиндрически симметричном потенциале. В цилиндрических координатах  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  оно имеет вид

$$e^{-i\varphi} \left( -i \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \Psi_2 = (E - v(r)) \Psi_1, \quad (17)$$

$$e^{i\varphi} \left( -i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \Psi_1 = (E - v(r)) \Psi_2.$$

Ищем решение в виде  $\Psi_1 = e^{in\varphi} \chi_1$ ,  $\Psi_2 = e^{i(n+1)\varphi} \chi_2$ , где  $\chi_1, \chi_2$  удовлетворяют уравнениям

$$\left( -i \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i(n+1)}{r} \right) \chi_2 = (E - v(r)) \chi_1, \quad (18)$$

$$\left( -i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{in}{r} \right) \chi_1 = (E - v(r)) \chi_2.$$

**4.1. Прямоугольная яма.** Рассмотрим цилиндрически симметричную яму постоянной глубины:  $v(r) = -v_0$  при  $r < a$  и  $v(r) = 0$  при  $r \geq a$ . Исключая  $\chi_2$  из (18), получаем:

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{n^2}{r^2} - (E + v_0)^2 \right\} \chi_1 = 0, \quad r < a, \quad (19)$$

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{n^2}{r^2} - E^2 \right\} \chi_1 = 0, \quad r \geq a. \quad (20)$$

Эти уравнения имеют решения  $J_n(|E+v_0|r)$ ,  $N_n(|E+v_0|r)$  и  $J_n(|E|r)$ ,  $N_n(|E|r)$ , соответственно. Решение, регулярное в точке  $r = 0$ , имеет вид  $\chi_1(r < a) = C_n J_n((E+v_0)r)$ .

В уравнение (20) входит только квадрат энергии. Таким образом, его решения не зависят от знака  $E$ . Эти решения эквивалентны состояниям рассеяния для обычного радиального уравнения Шредингера с  $E > 0$ . Отсюда следует, что в такой потенциальной яме связанных состояний нет. Подчеркнем, что этот вывод не зависит от глубины и ширины ямы, то есть двумерная локализация квазичастиц в графене (квантовая точка) принципиально невозможна (разумеется, речь идет о той области импульсов, в которой справедливы гамильтониан (2) и линейный

закон дисперсии). То же самое относится, очевидно, к любому убывающему на бесконечности потенциалу, откуда следует отсутствие водородоподобных состояний доноров или акцепторов в графене.

Перейдем к задаче рассеяния. Пусть волна с положительной энергией падает из бесконечности вдоль оси  $x$ . Тогда волновая функция  $\Psi$  на больших расстояниях имеет вид

$$\Psi \simeq \frac{e^{i|E|r \cos \varphi}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{i|E|r}}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} f_1(\varphi) \\ f_2(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Пользуясь разложением плоской волны  $\exp(i|E|r \cos \varphi) = (1/2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n [H_n^{(1)}(|E|r) + H_n^{(2)}(|E|r)] \exp(in\varphi)$ , представим решение в виде

$$\Psi = \frac{1}{2} \times \quad (22)$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} i^n e^{in\varphi} (S_n^{(1)} H_n^{(1)}(|E|r) + 2^{-1/2} H_n^{(2)}(|E|r)) \\ i^n e^{in\varphi} (S_n^{(2)} H_n^{(1)}(|E|r) + 2^{-1/2} H_n^{(2)}(|E|r)) \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$f_1(\varphi) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi|E|}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} (S_n^{(1)} - 2^{-1/2}), \quad (23)$$

$$f_2(\varphi) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi|E|}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} (S_n^{(2)} - 2^{-1/2}).$$

Используя функциональные соотношения для функций Ганкеля, нетрудно показать, что  $S_{n+1}^{(2)} = S_n^{(1)}$ . Отсюда  $f_2(\varphi) = e^{i\varphi} f_1(\varphi)$ . Условия непрерывности волновой функции при  $r = a$  приводят к уравнениям

$$S_n^{(1)} H_n^{(1)}(|E|a) + 2^{-1/2} H_n^{(2)}(|E|a) = C_n J_n(|E + v_0|a), \quad (24)$$

$$S_n^{(1)} H_{n+1}^{(1)}(|E|a) + 2^{-1/2} H_{n+1}^{(2)}(|E|a) = C_n J_{n+1}(|E + v_0|a). \quad (25)$$

Отсюда находятся величины  $S_n^{(1)}$ ,  $S_n^{(2)}$ . Волновая функция рассеянных частиц имеет вид  $\Psi_{\text{out}} \simeq e^{i|E|r} r^{-1/2} (f_1(\varphi), f_2(\varphi))$ , откуда плотность потока  $\mathbf{j}_{\text{out}} = \Psi_{\text{out}}^+ \boldsymbol{\sigma} \Psi_{\text{out}} = 2|f_1(\varphi)|^2 r^{-1} \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$  (в фигурных скобках стоят декартовы компоненты вектора тока). Отсюда дифференциальное сечение рассеяния есть  $d\sigma/d\varphi = 2|f_1(\varphi)|^2$ . Полное сечение рассеяния имеет вид

$$\sigma = 2 \int_0^{2\pi} |f_1(\varphi)|^2 d\varphi = \frac{1}{|E|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_{n+1}|^2 = \frac{8}{|E|} \times \quad (26)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{J_n(|E + v_0|a) J_{n+1}(|E|a) - J_{n+1}(|E + v_0|a) J_n(|E|a)}{J_n(|E + v_0|a) H_{n+1}^{(1)}(|E|a) - J_{n+1}(|E + v_0|a) H_n^{(1)}(|E|a)} \right|^2.$$

Аналогичные вычисления приводят к такой же формуле для полного сечения рассеяния для частиц с отрицательной энергией. В низкоэнергетическом пределе  $|E|a \ll 1$ , пользуясь асимптотическими формулами  $J_0(z) = 1 + O(z^2)$ ,  $J_1(z) = z/2 + O(z^2)$ ,  $N_0(z) = \text{const} + 2 \ln(z)/\pi + O(z)$ ,  $N_1(z) = -2/(\pi z) + O(z^0)$ , находим:

$$\sigma \simeq 2 \left( \frac{\pi J_1(v_0 a)}{J_0(v_0 a)} \right)^2 |E| a^2. \quad (27)$$

На рис.2 приведено сечение рассеяния как функция  $|E|a$ . Видно, что сечение рассеяния имеет

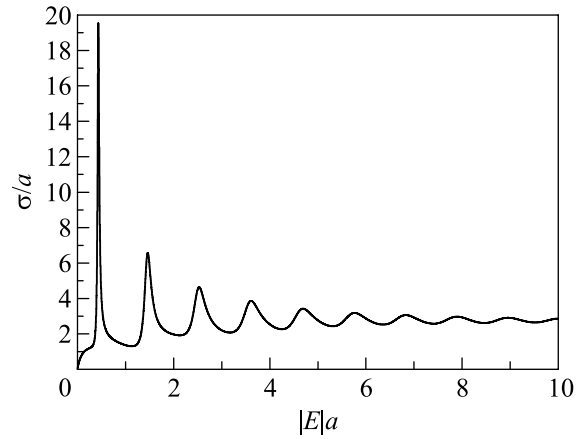


Рис.2. Сечение рассеяния прямоугольной аксиально симметричной ямы радиуса  $a$ ,  $v_0 a = \pi$

резонансы. Противоположный предельный случай,  $|E|a \gg 1$ , удобно исследовать, решая задачу рассеяния иным методом.

**4.2. Функция Грина и интегральное уравнение рассеяния.** Функция Грина оператора (1) –  $2 \times 2$ -матрица  $G(\mathbf{r})$  – удовлетворяет уравнению

$$[(\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}}) - E] G(\mathbf{r}; E) = \delta(\mathbf{r}) I, \quad (28)$$

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решая это уравнение, находим:

$$G(\mathbf{r}; E) = \quad (29)$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} iE H_0^{(1)}(|E|r) & |E| e^{-i\varphi} (H_0^{(1)})'(|E|r) \\ |E| e^{i\varphi} (H_0^{(1)})'(|E|r) & iE H_0^{(1)}(|E|r) \end{pmatrix}.$$

При больших значениях  $|E|r$  функция Грина имеет асимптотический вид:

$$G(\mathbf{r}; E) \simeq \sqrt{\frac{|E|}{8\pi r}} e^{i(|E|r + \pi/4)} \begin{pmatrix} \text{sign}(E) & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & \text{sign}(E) \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Запишем интегральное уравнение рассеяния

$$\Psi(\mathbf{r}; E) = \Psi_{in}(\mathbf{r}; E) - \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; E) v(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}'; E) d^2 \mathbf{r}', \quad (31)$$

где  $\Psi_{in} = e^{i|E|r \cos \varphi} 2^{-1/2} (1, 1)$  – волновая функция падающих частиц. В первом борновском приближении оно сводится к следующему

$$\Psi(\mathbf{r}; E) = \Psi_{in}(\mathbf{r}; E) - \frac{v_0 a}{2q} \times \sqrt{\frac{\pi |E|}{r}} e^{i(|E|r + \pi/4)} \begin{pmatrix} 1 + e^{-i\varphi} \\ \text{sign}(E) (1 + e^{i\varphi}) \end{pmatrix} J_1(qa), \quad (32)$$

где  $q = 2|E| \sin(\varphi/2)$ . Отсюда сечение рассеяния есть

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\varphi} &= \frac{2\pi |E| v_0^2 a^2}{q^2} \cos^2(\varphi/2) J_1^2(qa) = \\ &= \frac{\pi v_0^2 a^2}{2|E|} \cot^2(\varphi/2) J_1^2(2|E|a \sin(\varphi/2)), \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{\pi^2 v_0^2 a^4 |E|}{2} {}_2F_3[1/2, 3/2; 2, 2, 3; -4|E|^2 a^2], \quad (33)$$

где  ${}_2F_3$  – обобщенная гипергеометрическая функция.

При  $|E|a \rightarrow \infty$  сечение рассеяния выходит на насыщение,  $\sigma \rightarrow 16v_0^2 a^3/3$ . Напомним, что для обычных частиц борновское сечение рассеяния на корот-

кодействующем потенциале стремится к нулю с ростом энергии [10], однако если чисто формально считать массу пропорциональной импульсу, чтобы получить линейный закон дисперсии, то предельное значение борновского сечения при  $|E| \rightarrow \infty$  также оказывается постоянным.

Авторы благодарят В.М. Ковалева и М.В. Энтина за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 05-02-16939), Совета при Президенте РФ (НШ 4500, 2006.2) и программ Президиума РАН. Один из авторов (Т.Я.Т.) благодарит за поддержку программу “Лучшие аспиранты РАН”.

1. K. S. Novoselov et al., *Science* **306**, 666 (2004).
2. Y. Zhang et al., *Nature* **438**, 201 (2005).
3. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang et al., *Nature* **438**, 197 (2005).
4. V. V. Cheianov and V. I. Fal'ko, *Phys. Rev. B* **74**, 041403(R) (2006).
5. V. V. Cheianov and V. I. Fal'ko, arXiv:cond-mat/0608228 v1 10 Aug 2006.
6. J. Milton Pereira, Jr., V. Mlinar, F. M. Peeters, and P. Vasilopoulos, *Phys. Rev. B* **74**, 045424 (2006).
7. J. K. Pachos and M. Stone, arXiv:cond-mat/0607394 v3 2 Oct 2006.
8. Л. В. Берлянд, С. Ю. Доброхотов, Доклады Акад. наук СССР **296**, 80 (1987).
9. V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhotov, and T. Ya. Tudorovskiy, *J. Eng. Math.* **55**, 179 (2006).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (Нерелятивистская теория). Теоретическая физика*, т.3. М.: Наука, 1989.