Письма в ЖЭТФ, том 84, вып. 12, с. 759 – 763 © 2006 г. 25 декабря

Концепция P-квазиспина в поляризационной оптике

В. П. Карасев[1)]

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 октября 2006 г.

После переработки 14 ноября 2006 г.

Обосновывается концепция поляризационного (P) квазиспина, обеспечивающая эффективный анализ поляризации произвольных квантовых световых полей. В ее рамках определяются новые концептуальные и операциональные характеристики поляризационных состояний квантового излучения, а также преобразования их поляризационной динамики.

PACS: 03.65.–w, 03.70.+k, 42.25.Ja, 42.50.–p

1. В последнее время большое внимание уделяется изучению поляризационных состояний (ПС) квантовых световых полей ввиду их важной роли в основаниях квантовой теории и квантовой информатики [1]. Однако до недавнего времени их анализ был полуфеноменологическим и неполным, так как он не вскрывает природы поляризации и вполне развит лишь для плосковолнового излучения [2]. Это сильно ограничивает возможности в постановке и анализе экспериментов с многочастотными полями произвольной пространственной конфигурации (см., например, [3, 4] и ссылки там), которые используются при кодировании квантовой информации [1]. Эти проблемы решаются в рамках концепции поляризационного (P) квазиспина [5], позволившей глубже понять природу поляризации квантового света и дать эффективный анализ ряда проблем поляризационной оптики (ПО)[6, 2]. Однако математический характер работы [5] препятствовал широкому применению концепции, хотя ее частные моменты спорадически воспроизводились в литературе [7 – 9]. Цель настоящей работы – прояснить ключевые физические аспекты концепции P-квазиспина в форме, нацеленной на планирование и анализ новых оптических экспериментов с многомодовыми полями, включая обнаружение новых "перепутанных" (entangled) ПС, обусловленных **коллективными** свойствами светового поля как сложной динамической системы.

2. Для лучшего понимания сначала кратко обсудим стандартные подходы к изучению ПС световых полей в классической и квантовой ПО [10, 11, 2].

Описание ПС света в классической ПО осуществляется для плосковолнового квазимонохроматического излучения на основе формализма параметров Стокса $\bar{\sigma}_i$[10], которые определяются как коэффициенты разложения

$$\widehat{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3}\bar{\sigma}_i(t)\widehat{\Sigma}_i$$

матрицы когерентности $\widehat{\mathcal{C}}$ по $\widehat{\Sigma}_0 = ||\delta_{\alpha\beta}|| \equiv \widehat{I}$ и матрицам Паули $\widehat{\Sigma}_{i=1,2,3} = ||\Sigma^i_{\alpha\beta}||$. Они могут быть выражены [2] как статистические средние $\bar{\sigma}_i = \int \sigma_i(\{E_\alpha\})\rho^p(\{\sigma_{i=1,2,3}\})\prod_i d\sigma_i$ от *переменных Стокса* $\sigma_i(\{E_\alpha\}) \equiv \sum_{\alpha,\beta}\Sigma^i_{\beta\alpha}E_\alpha E^*_\beta = \sum_{\alpha,\beta}\Sigma^i_{\beta\alpha}A_\alpha A^*_\beta e^{i[\phi_\alpha-\phi_\beta]}$, где $E_{\alpha=x,y}(t) = A_\alpha(t)e^{i\phi_\alpha(t)}e^{i\omega t}$ – компоненты двумерного вектора Джонса, моделирующего электрическое поле $\mathbf{E}(t)$ в форме случайного аналитического сигнала [10], а редуцированное распределение $\rho^p(\{\sigma_{i=1,2,3}\}) = \int \rho^f(A_x, A_y; \phi_x, \phi_y)d\phi(\phi \equiv \phi_x + \phi_y)$ вполне характеризует ПС светового поля. Переменные σ_i удовлетворяют соотношению $\sigma_0^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$, определяющему сферу Пуанкаре $S^2_P = \{\sigma \equiv \{\sigma_{i=1,2,3}\} = \sigma_0\mathbf{n}, \mathbf{n} \equiv (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\}$, а их средние определяют (задающую классификацию ПС) степень поляризации $\mathcal{P}_{cl} = \sqrt{\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 + \bar{\sigma}_3^2}/\bar{\sigma}_0$. Динамика ПС световых полей определяется с помощью преобразований

$$E_\alpha \xrightarrow{\widehat{u}(\{a_i\})} \widehat{u}\,E_\alpha = \sum\nolimits_{\beta=x,y} u_{\alpha\beta}(\{a_i\})E_\beta,$$

$$\widehat{u}(\{a_i\}) = ||u_{\alpha\beta}(\{a_i\})|| = \sum_{i=0}^{3} a_i\,\widehat{\Sigma}_i$$

векторов Джонса, где параметры a_i соответствуют приборам бездиссипативной ПО [10, 7]. Отсюда следует, что $\sigma_{1,2,3}$ и $\bar{\sigma}_{1,2,3}$ преобразуются как компоненты 3-мерных векторов, а σ_0 и $\mathcal{P}_{cl}$ – как скаляры относительно группы $SU(2) = \{\widehat{u}(\{a_i\}) = \cos\delta\,\widehat{\Sigma}_0 + i\sin\delta\,\mathbf{n}\cdot\widehat{\Sigma} = e^{i\delta\mathbf{n}\cdot\widehat{\Sigma}}\}$ (однако групповой характер и

[1)]e-mail: vpk43@mail.ru

экспоненциальная форма $\widehat{u}(\{a_i\})$ в руководствах по ПО не фиксируются).

Квантовая теория световых полей опирается на разложения операторов векторного потенциала $\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)$, электрического $(\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t))$ и магнитного $(\mathbf{H}(\mathbf{r},t))$ полей по плоским монохроматическим волнам, задающим фотонную структуру электромагнитного поля [11]. Для случая m пространственно временных (ПВ) мод $\mathbf{k}_j$ они имеют вид

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) = c\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_j}}\{\widehat{\mathbf{A}}^{(+)}(j)e^{i(\mathbf{k}_j\mathbf{r}-\omega_j t)}+ +\widehat{\mathbf{A}}^{(-)}(j)e^{-i(\mathbf{k}_j\mathbf{r}-\omega_j t)}\},$$

$$\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\widehat{\mathbf{A}}}{\partial t}, \quad \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t) = \nabla\times\widehat{\mathbf{A}}, \tag{1}$$

$$\widehat{\mathbf{A}}^{(-)}(j) = \sum_{\alpha=\pm}\mathbf{e}_{\alpha j}\widehat{a}^{\dagger}_{\alpha j} = (\widehat{\mathbf{A}}^{(+)}(j))^{\dagger},$$

$$[\widehat{a}_{\alpha i}, \widehat{a}^{\dagger}_{\beta j}] = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta},$$

где $\mathbf{e}_{\pm j}$ – поляризационные орты, а $\widehat{a}^{\dagger}_{\alpha j}/\widehat{a}_{\alpha j}$ – операторы рождения / уничтожения фотонов с волновым вектором $\mathbf{k}_j$, частотой $\omega_j = c|\mathbf{k}_j|$ и поляризацией $\alpha = \pm$ (в спиральном базисе), которые являются **базисными величинами** при описании квантового излучения, поскольку в их терминах задаются произвольные квантовые наблюдаемые и состояния[11, 2]. Так, гамильтониан и импульс поля излучения имеют вид

$$\widehat{H}_f = \frac{1}{8\pi}\int_V[\widehat{\mathbf{E}}^2+\widehat{\mathbf{H}}^2]d^3\mathbf{r} = \hbar\sum_{i=1}^{m}\omega_i\sum_{\alpha=\pm}\widehat{n}_{\alpha i},$$

$$\widehat{\mathbf{P}}_f = \frac{c}{4\pi}\int_V[\widehat{\mathbf{E}}\times\widehat{\mathbf{H}}]d^3\mathbf{r} = \hbar\sum_{i=1}^{m}\mathbf{k}_i\sum_{\alpha=\pm}\widehat{n}_{\alpha i},$$

$$\widehat{n}_{\alpha i} \equiv \widehat{a}^{\dagger}_{\alpha i}\widehat{a}_{\alpha i},$$

а задающее описание квантовых состояний такого поля $2m$-модовое гильбертово пространство $L_F(2m) = \mathrm{Span}\{|\{n_{+i}, n_{-i}\}\rangle\}$ определяется как тензорное произведение $L_F(2m) = \prod_i^{\otimes m} L_F^i(2)$ 2-модовых фоковских пространств

$$L_F^j(2) = \mathrm{Span}\{|\{n_{\pm j}\}\rangle = \prod_{\alpha=\pm}[n_{\alpha j}!]^{-1/2}(\widehat{a}^{\dagger}_{\alpha j})^{n_{\alpha j}}|0\rangle\}.$$

Векторы $|\{n_{\pm i}\}\rangle$ являются собственными для операторов $\widehat{H}_f, \widehat{\mathbf{P}}_f$ и (релятивистски-инвариантных) парциальных операторов спиральности $\widehat{S}_{3\mathbf{k}_j} = (\widehat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{k}_j)/|\mathbf{k}_j| = \widehat{n}_{+j} - \widehat{n}_{-j}$ – проекций спина $\widehat{\mathbf{S}}$ ПВ мод $\mathbf{k}_j$ на оси распространения волн. Однако замкнутое полное описание поляризации квантового излучения в общем случае отсутствует. В самом деле, “наивное” квантование величин σ_i^{cl} и (1) определяют ”*классические*” операторы Стокса

$$\widehat{\sigma}_i^{cl} \equiv \sum_{\alpha,\beta}\Sigma^i_{\beta\alpha}\widehat{E}^{(-)}_{\alpha}\widehat{E}^{(+)}_{\beta} \propto$$

$$\propto \sum_{\alpha,\beta}\Sigma^i_{\beta\alpha}\sum_{j,k=1}^{m}\widehat{a}^{\dagger}_{\alpha j}\widehat{a}_{\beta k}(\omega_j\omega_k)^{1/2}\,e^{i(\omega_k-\omega_j)(\frac{z}{c}-t)},$$

которые, очевидно, непригодны для определения ПС квантового излучения при $m \geq 2$. Использование же парциальных $(\widehat{S}_{3\mathbf{k}_j})$ и глобального (коллективного $\sum_{j=1}^{m}\widehat{S}_{3\mathbf{k}_j}$) операторов спиральности (единственных, в отличие от случая массивных квантовых полей, измеряемых компонент спина [11]) не дает полного описания ПС излучения, так как их собственные векторы сильно вырождены в $L_F(2m)$.

3. Описанные выше недостатки устраняются в рамках концепции P-квазиспина, которая изначально использует фотонную структуру (1) световых полей и их калибровочную $SU(2)$-симметрию в импульсном представлении и обеспечивает определение наблюдаемых и преобразований бездиссипативной ПО в терминах билинейных комбинаций операторов $\widehat{a}^{\dagger}_{\alpha j}, \widehat{a}_{\alpha j}$ – генераторов $\widehat{P}_{i=1,2,3}$ группы $SU(2)$ (компонент P-квазиспина) [5].

В случае фиксированной ПВ-моды $\mathbf{k}_j$ операторы $\widehat{P}_i \equiv \widehat{P}_{i\,\mathbf{k}_j}$ пропорциональны операторам $\widehat{\sigma}_i^{cl}$: $\widehat{P}_{i\,\mathbf{k}_j} = (V/4\pi\hbar\omega_j)\widehat{\sigma_i}^{cl}$ и выражаются через разности операторов $\widehat{n}_{\alpha j}$ чисел фотонов в стандартных парах ортогональных поляризационных мод $(\alpha = x,y; x',y'; \pm)$, связанных между собой унитарными преобразованиями [5]: $\widehat{P}_{1\,\mathbf{k}_j} = \frac{1}{2}(\widehat{n}_{xj} - \widehat{n}_{yj})$, $\widehat{P}_{2\,\mathbf{k}_j} = \frac{1}{2}(\widehat{n}_{x'j} - \widehat{n}_{y'j})$, $\widehat{P}_{3\,\mathbf{k}_j} = \frac{1}{2}(\widehat{n}_{+j} - \widehat{n}_{-j}) = \frac{1}{2}\widehat{S}_{3\mathbf{k}_j}$, где последнее равенство отражает дуальную (спин-квазиспиновую) природу поляризации [2]. Операторы $\widehat{P}_{i\,\mathbf{k}_j}$ – генераторы группы $SU(2)_p = \{\widehat{U}(\mathbf{w} = w\mathbf{n}) = e^{-i\mathbf{w}\cdot\widehat{\mathbf{P}}}\}$ (**сохраняющих** значения $\widehat{H}_f$ и $\widehat{\mathbf{P}}_f$) преобразований пар операторов $\widehat{a}^{\dagger}_{\pm j}$ как компонент поляризационных спиноров $\widehat{\mathbf{a}}^{\dagger}_j = \{\widehat{a}^{\dagger}_{\pm j}\}$[5]:

$$\widehat{a}^{\dagger}_{\alpha j} \quad\rightarrow\quad \widehat{a}^{\dagger}_{\alpha j}(\mathbf{w}) = \widehat{U}(\mathbf{w})\widehat{a}^{\dagger}_{\alpha j}\widehat{U}(\mathbf{w})^{\dagger} = = \sum\nolimits_{\beta=\pm}U^{1/2}_{\alpha\beta}(\mathbf{w})\,\widehat{a}^{\dagger}_{\beta j}. \tag{2}$$

Преобразования (2) индуцируют “вращения” $\mathbf{e}_{\alpha j} \rightarrow \mathbf{e}_{\alpha j}(\mathbf{w}) = \sum_{\beta=\pm}U^{1/2\,*}_{\beta\alpha}(\mathbf{w})\,\mathbf{e}_{\beta j}$ поляризационных ортов $\mathbf{e}_{+j}, \mathbf{e}_{-j}$ как компонент ”поляризационных спиноров”, переходящих также друг в друга при зеркальном отражении $\widehat{r}_m : \mathbf{e}_{\pm j} \xrightarrow{\widehat{r}_m} \mathbf{e}_{\mp j}$ [11, 5]. Поэтому P-квазиспин можно трактовать как киральный изоспин (поскольку его действие не меняет значений $\mathbf{k}_j, \omega_j$), который, возможно, связан с общей киральной $SU(2)$-симметрией электрослабых взаимодействий [12]. Отметим, что в экспериментальном плане группа $SU(2)_p$ является аналогом "классической" группы $SU(2) = \{\widehat{u} = e^{i\delta\mathbf{n}\cdot\widehat{\Sigma}}\}$.

В случае пучков с m различными ПВ модами $\mathbf{k}_j$ группа $SU(2)_p$ очевидным образом расширяется до калибровочной группы $SU(2)_p^{ga} = \prod_{j=1}^m SU(2)_p^j = \{\exp(-i\sum_{j=1}^m \mathbf{w}(\mathbf{k}_j) \cdot \widehat{\mathbf{P}}_{i\,\mathbf{k}_j})\}$ локальных $SU(2)_p$-симметрий, которая в операциональном плане описывает независимые поляризационные преобразования отдельных ПВ мод $\mathbf{k}_j$. Однако для характеристики коллективных ПС квантового света как сложной динамической системы, помимо группы $SU(2)_p^{ga}$ и "парциальных" P-квазиспинов $\widehat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}_j}$, необходимо использовать компоненты $\widehat{P}_i$ полного P-квазиспина $\widehat{\mathbf{P}} = \sum_j \widehat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}_j}$ и группу $SU(2)_p^{gl} = \{e^{-i\mathbf{w}\cdot\widehat{\mathbf{P}}}\}$ глобальной $SU(2)_p$-симметрии, которая в операциональном плане соответствует "синфазным" (ввиду $\mathbf{w}(\mathbf{k}_j) = \mathbf{w}$) поляризационным преобразованиям всех ПВ мод $\mathbf{k}_j$ [5, 2].

4. P-квазиспиновый формализм обеих этих групп, базирующийся (как и теория спиновых систем) на теории углового момента [13], позволяет детально исследовать свойства ПС квантового света. Это достигается путем введения в пространстве $L_F(2m)$ **поляризационного** базиса $\{|P;\mu\rangle\}$ (*невырожденных* при $m = 1$) собственных состояний двух коммутирующих операторов $\widehat{\mathbf{P}}^2 \equiv \widehat{P}_1^2 + \widehat{P}_2^2 + \widehat{P}_3^2, \widehat{P}_3$: $\widehat{\mathbf{P}}^2|P;\mu\rangle = P(P+1)|P;\mu\rangle$, $\widehat{P}_3|P;\mu;\rangle = \mu|P;\mu;\rangle$, $2P = 0, 1, \ldots, \infty$, $|\mu| \le P$, где $SU(2)_p$-инвариантный оператор $\widehat{\mathbf{P}}^2$ определяет операторную сферу Пуанкаре $\widehat{S}_P^2 \equiv \{\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{w} = w\mathbf{n}) \equiv \widehat{U}(\mathbf{w})\widehat{\mathbf{P}}\widehat{U}(\mathbf{w})^\dagger : (\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{w}))^2 \equiv \equiv \sum_{i=1,2,3} \widehat{P}_i^2(\mathbf{w}) = \widehat{\mathbf{P}}^2\}$. Вместе с обычной сферой Пуанкаре $S_P^2 \equiv \{\langle\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{w})\rangle : \langle\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{w})\rangle^2 \equiv \equiv \sum_{i=1,2,3}\langle\widehat{P}_i(\mathbf{w})\rangle^2 = \sum_{i=1,2,3}\langle\widehat{P}_i\rangle^2 = \langle\widehat{\mathbf{P}}\rangle^2\}$, определяемой в терминах квантовых средних $\langle\widehat{P}_i\rangle$, сфера $\widehat{S}_P^2$ задает измеряемые экспериментально характеристики квантового излучения, обеспечивающие более тонкую, чем в классической ПО, классификацию ПС: 1) две $SU(2)_p$-инвариантные степени поляризации ("квазиклассическую" $\mathcal{P}_{qc} = 2\sqrt{\langle\widehat{\mathbf{P}}\rangle^2}/\langle\widehat{n}\rangle$ и P-квазиспиновую $\mathcal{P}_{qs} = \sqrt{\langle\widehat{\mathbf{P}}\rangle^2/\langle\widehat{\mathbf{P}}^2\rangle}$); 2) P-квазиспиновые компонентные "шумы" $\Delta P_i^2 = \langle\widehat{P}_i^2\rangle - \langle\widehat{P}_i\rangle^2$ и 3) полный поляризационный "шум" $\Delta P^2 = = \sum_{i=1}^3 \Delta P_i^2 = \langle\widehat{\mathbf{P}}^2\rangle - \langle\widehat{\mathbf{P}}\rangle^2$. Эти величины можно определить в терминах как парциальных квазиспинов $\widehat{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}_j}$ (характеристики ПС отдельных ПВ мод), так и полного квазиспина $\widehat{\mathbf{P}}$ (коллективные характеристики ПС всего поля излучения). Очевидно, $\mathcal{P}_{qs}$ – новая характеристика ПС, тогда как при $m = 1\, \mathcal{P}_{qc} = \mathcal{P}_{cl}$ (при замене $\bar{\sigma}_i \to \langle\sigma_i\rangle$), а при $m \ge 2$ величина $\mathcal{P}_{qc}$ имеет самостоятельное значение. Заметим, что величины $\mathcal{P}_{qc}, \mathcal{P}_{qs}$ имеют ясный физический смысл в отличие от предложенных в [8, 9].

Введение базиса $\{|P;\mu\rangle\}$ влечет разбиение $L_F(2m) = \sum_{2P=0}^\infty L(P)$ пространства $L_F(2m)$ в прямую сумму $SU(2)_p$-инвариантных подпространств $L(P = \text{const})$ ("P-доменов") и позволяет определить ПС квантового излучения и квантовый аналог распределения $\rho^p(\ldots)$. Действительно, матрица любой поляризационной переменной $\widehat{A}(\widehat{\mathbf{P}})$, зависящей только от компонент P-квазиспина, имеет в нем согласно формализму [13] блочно-диагональную структуру. Поэтому вычисление квантовых средних $\langle\widehat{A}(\widehat{\mathbf{P}})\rangle \equiv \mathrm{Tr}[\widehat{\rho}\,\widehat{A}(\widehat{\mathbf{P}})]$ требует задания не полного полевого оператора плотности

$$\widehat{\rho} = \sum R^{\{n_{+j}, n_{-j}\}}_{\{n'_{+j}, n'_{-j}\}} |\{n_{+j}, n_{-j}\}\rangle\langle\{n'_{+j}, n'_{-j}\}|,$$

а некоторой его редукции – поляризационной матрицы плотности (ПМП) $\widehat{R}$. Конкретная форма ПМП $\widehat{R}$ определяется заданием базиса $\{|P;\mu\rangle\}$ в терминах фоковского базиса $\{|\{n_{\pm j}\}\rangle\}$.

Для элементарного случая одной ПВ моды ($m = 1$) базисные векторы $|P;\mu\rangle$ задаются путем перенумерации фоковских состояний в спиральном базисе: $|P;\mu\rangle = |n_+ = P + \mu, n_- = P - \mu\rangle$ (здесь и ниже индекс j ПВ моды опущен, если в нем нет необходимости), поскольку в этом случае (и только!) оператор полного числа фотонов $\widehat{n} = \widehat{n}_+ + \widehat{n}_-$ связан соотношением $\widehat{P} = \widehat{n}/2$ с P-квазиспиновым оператором $\widehat{\mathbf{P}}^2 = \widehat{P}^2 + \widehat{P}$. Тогда $\langle P', \mu'|\,\widehat{A}(\widehat{\mathbf{P}})\,|P, \mu\rangle = \delta_{P',P} A^P_{\mu',\mu}$ и квантовое среднее

$$\left\langle \widehat{A}(\widehat{\mathbf{P}}) \right\rangle = \sum_{2P=0}^{\infty} \sum_{\mu=-P}^{P} \sum_{\mu'=-P}^{P} A^P_{\mu,\mu'}\, R^P_{\mu',\mu} \equiv \mathrm{Tr}\left[\widehat{R}\widehat{A}(\widehat{\mathbf{P}})\right]$$

выражается через матричные элементы $R^P_{\mu',\mu} \equiv \langle P;\mu'|\widehat{\rho}|P;\mu\rangle$, определяющие ПМП

$$\widehat{R} = \sum\nolimits_{P,\mu,\mu'} R^P_{\mu',\mu} \quad |P;\mu'\rangle\,\langle P;\mu| \tag{3}$$

как редукцию оператора $\widehat{\rho}$. Очевидно, ПМП $\widehat{R}$ факторизуется (и описывает "чистое" ПС) только (!) в случае, если $\widehat{\rho} = |\Psi_P\rangle\langle\Psi_P|$, $|\Psi_P\rangle \in L(P = \text{const}) = = \{\sum_\mu c^P_\mu |P;\mu\rangle\}$ [2].

В случае произвольного числа $m \ge 2$ ПВ мод можно использовать два типа поляризационных базисов:

1) тензорное произведение $\prod_{j=1}^{\otimes m} |P_j;\mu_j\rangle \equiv |\{P_j;\mu_j\}\rangle$, обеспечивающее независимый поляризационный анализ отдельных ПВ мод; 2) "перепутанный" базис $\{|P;\mu;\lambda\rangle\}$ собственных векторов $\widehat{\mathbf{P}}^2, \widehat{P}_3$ для полного P-квазиспина, задаваемых связыванием "парциальных" состояний $|P_j;\mu_j\rangle$:

$$|P;\mu;\lambda\rangle \equiv \sum_{\mu_j} C^{P;\mu;\lambda}_{\{P_j;\mu_j\}} |\{P_j;\mu_j\}\rangle,$$

где

$$\widehat{P} \neq \frac{\widehat{n}}{2}, \widehat{n} = \sum_{j=1}^{m} [\widehat{n}_{+j} + \widehat{n}_{-j}],$$

а составные индексы λ определяются через парциальные ($P_j = n_j/2$) и промежуточные ($P_{jk}, \dots$) P-квазиспины [2]. Например, при $m = 3$ и схеме связи ((12)3) имеем:

$$|P;\mu;\lambda = \{P_{j=1,2,3}, P_{12}\}\rangle =$$

$$= \sum_{\{\mu_j\}} C^{P_{12},\mu_{12}}_{P_1,\mu_1;P_2,\mu_2} C^{P,\mu}_{P_{12},\mu_{12};P_3,\mu_3} \prod_{j=1}^{\otimes 3} |P_j;\mu_j\rangle,$$

где $C^{\dots}_{\dots}$ – коэффициенты Клебша–Гордана группы $SU(2)$ [13]. Соответственно, возможны две схемы редукции $\widehat{\rho}$ и определения ПМП $\widehat{R}$ излучения. В первой из них ПМП задается выражением

$$\begin{gathered}\widehat{R}^{\otimes} = \sum\nolimits_{\{P_j,\mu_j,\mu'_j\}} R^{\{P_j\}}_{\{\mu'_j,\mu_j\}} \; |\{P_j;\mu'_j\}\rangle\,\langle\{P_j;\mu_j\}|, \\ R^{\{P_j\}}_{\{\mu'_j,\mu_j\}} \equiv \langle\{P_j;\mu'_j\}|\widehat{\rho}|\{P_j;\mu_j\}\rangle,\end{gathered} \tag{4}$$

приспособленным для вычисления средних $\langle\widehat{A}(\{\widehat{\mathbf{P}}_j\})\rangle$ и анализа корреляций ПС отдельных ПВ мод в пучках от произвольных источников. Вторая схема адекватна для описания коллективных явлений и вычисления средних $\langle\widehat{A}(\widehat{\mathbf{P}}, \{\widehat{n}_j\})\rangle$ наблюдаемых, зависящих от компонент полного P-квазиспина и $\widehat{n}_j$. При этом ПМП определяется соотношениями

$$\begin{gathered}\widehat{R}^{col} = \sum_{P,\lambda,\mu,\mu'} R^{P,\lambda}_{\mu',\mu} \quad |P;\lambda;\mu'\rangle\,\langle P;\lambda;\mu|, \\ R^{P,\lambda}_{\mu',\mu} = \langle P;\lambda;\mu'|\widehat{\rho}|P;\lambda;\mu\rangle,\end{gathered} \tag{5}$$

адекватными для структурного анализа (в силу определения $|P;\lambda;\mu\rangle$) "перепутывания" ПС отдельных ПВ мод, ассоциированного с $SU(2)^{gl}_p$-симметрией (сравни [14]). Отметим также, что, помимо (3)–(5), для ПМП возможны и другие формы, полезные для анализа специальных вопросов (см. [2] и ссылки там): 1) $SU(2)_p$-мультипольные (задаются разложениями $\widehat{R}$ по базису $SU(2)$-неприводимых операторов $\widehat{W}^{P,\lambda}_{l,m} = \sum_{\mu,\mu'} C^{l,m}_{P,\mu;P,\mu'} |P;\lambda;\mu\rangle\,\langle P;\lambda;\mu'|$), 2) квазиклассические (определяющие поляризационные функции квазивероятностей и обеспечивающие связь между описаниями ПС в классической и квантовой ПО) и 3) томографические (определяющие косвенное "измерение" ПС).

5. В заключение кратко обсудим преобразования основных характеристик квантового света относительно действия групп $SU(2)^{ga}_p$, $SU(2)^{gl}_p$, определяющих различные типы поляризационных динамик (сравни [3]). Они определяются с помощью (2) и техники [13]. Так, операторы $\widehat{P}_{\alpha\mathbf{k}_j}$, $\widehat{P}_\alpha$, $\widehat{\sigma}^{cl}_\alpha$ преобразуются по векторному представлению $\widehat{U}^1$, а векторы $|P;\mu;\lambda\rangle$ – по неприводимому представлению $\widehat{U}^P$ группы $SU(2)^{gl}_p$:

$$\begin{gathered}\widehat{V}^+_{\alpha=+,0,-} \overset{SU(2)^{gl}_p}{\longrightarrow} \widehat{V}^+_\alpha(w,\mathbf{n}) \equiv \widehat{U}(w,\mathbf{n})\widehat{V}^+_\alpha\widehat{U}^\dagger(w,\mathbf{n}) = \\ = \sum\nolimits_{\mu=0,\pm} U^1_{\alpha,\mu}(w;\mathbf{n})\,\widehat{V}^+_\mu,\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}|P;\mu;\lambda\rangle \overset{SU(2)^{gl}_p}{\longrightarrow} |P;\mu;\lambda\rangle(w,\mathbf{n}) \equiv \widehat{U}(w,\mathbf{n})\,|P;\mu;\lambda\rangle = \\ = \sum\nolimits_{\mu'=-P}^{P} U^P_{\mu,\mu'}(w;\mathbf{n})|P;\mu';\lambda\rangle,\end{gathered} \tag{7}$$

где $\widehat{V}^+_\alpha = \widehat{P}_{\alpha\mathbf{k}_j}, \widehat{P}_\alpha, \widehat{\sigma}^{cl}_\alpha$. Отсюда следует $SU(2)^{gl}_p$-инвариантность операциональных величин $\mathcal{P}_{cl}, \mathcal{P}_{qc}, \mathcal{P}_{qs}$ и $\Delta P^2, \Delta P^2_{\mathbf{k}_j}$. Однако для преобразований группы $SU(2)^{ga}_p$ ситуация более сложная. Так, например, если парциальные величины $\widehat{P}_{\alpha\mathbf{k}_j}$ преобразуются аналогично (6), то закон преобразования векторов $|P;\mu;\lambda\rangle$:

$$\begin{gathered}|P;\mu;\lambda\rangle \overset{SU(2)^{ga}_p}{\longrightarrow} |P;\mu;\lambda\rangle(\{\mathbf{w}_j\}) = \\ = \sum_{\{P',\mu';\mu_j,\mu'_j\}} C^{P';\mu';\lambda}_{\{P'_j;\mu'_j\}} C^{P;\mu;\lambda}_{\{P_j;\mu_j\}} \prod_j U^{P_j}_{\mu_j,\mu'_j}(\mathbf{w}_j)|P';\mu';\lambda\rangle,\end{gathered} \tag{8}$$

отличается от (7) и допускает (наблюдаемое и в эксперименте [3, 4]) "перепутывание" ПС из разных "P-доменов" $L(P = \mathrm{const}) \equiv \{\sum_{\mu,\lambda} |P;\mu;\lambda\rangle\}$.

Полученные результаты дают основу для существенного прогресса в ПО и общей теории квантовых полей. Так, можно использовать преобразования групп $SU(2)^{ga}_p$ и $SU(2)^{gl}_p$ типа (6)–(8) для целенаправленного поиска новых классов "перепутанных" ПС (сравни [3, 4, 15]), а ПМП (3)–(5) и операциональные величины $\mathcal{P}_{qc}, \mathcal{P}_{qs}$ – для их анализа и детальной классификации (сравни [2, 14]). В общетеоретическом плане учет киральной $SU(2)$-симметрии фотона, возможно, потребует модификации существующей теории электрослабых взаимодействий [12].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 04-02-17165) и ФЦНТП (контракт 2006-РИ-19.0/001/593). Автор благодарит С.П. Кулика за полезные обсуждения.

---

1. *Физика квантовой информации*, под ред. Д. Боумейстера, А. Экерта, А. Цайлингера, Постмаркет, Москва, 2002.
2. V. P. Karassiov, J. Rus. Laser Res. **26**, 484 (2005).
3. E. V. Moreva, G. A. Maslennikov, S. S. Straupe, and S. P. Kulik, Phys. Rev. Lett. **97**, 023602 (2006).
4. А. В. Бурлаков, С. П. Кулик, Г. О. Рытиков, М. В. Чехова, ЖЭТФ **122**, 738 (2002).
5. V. P. Karassiov, J. Phys. A **26**, 4345 (1993).
6. V. P. Karassiov, J. Rus. Laser Res. **21**, 370 (2000).
7. Д. Н. Клышко, ЖЭТФ **111**, 1955 (1997).
8. A. Luis, Phys. Rev. A **66**, 013806 (2002).
9. A. Sehat, J. Söderholm, G. Björk et al., Phys. Rev. A **71**, 033818 (2005).
10. Э. О'Нейл, *Введение в статистическую оптику*, М.: Мир, 1966.
11. J. M. Jauch and F. Rohrlich, *Theory of Photons and Electrons*, Springer, Berlin, 1976.
12. Л. Б. Окунь, *Физика элементарных частиц*, Наука, Москва, 1988.
13. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Ленинград: Наука, 1975.
14. K. G. H. Vollbrecht and R. F. Werner, ArXiv: quant-ph/0010095, 27 October (2000).
15. G. Brida, M. V. Chekhova, M. Genovese et al., Phys. Rev. A **70**, 032332 (2004).