Письма в ЖЭТФ, том 40, вып. 7, стр. 273 –275 *10 октября 1984 г.*

ЦЕПОЧКИ СОЛИТОНОВ РОССБИ И ГРАДИЕНТНЫХ СОЛИТОНОВ

А.Б.Михайловский, В.Р.Кудашев, В.П.Лахин,
Л.А.Михайловская, А.И.Смоляков, С.Ю.Шишков

Показано, что двумерное нелинейное уравнение $\nabla_\perp^2\varphi - \varphi + \varphi^2 = 0$, описывающее волны Россби и дрейфовые нелинейные волны в плазме, находящейся в магнитном поле имеет приближенное решение в виде бесконечной цепочки солитонов локализованных в поперечном направлении.

В [1, 2] было теоретически показано существование круглого солитона волн Россби во вращающейся мелкой жидкости конечной глубины, описываемого нелинейным уравнением вида

$$\nabla_\perp^2\varphi - \varphi + \varphi^2 = 0. \tag{1}$$

Здесь φ характеризует отклонение глубины жидкости от ее невозмущенного значения, $\nabla_\perp$ – оператор градиента в горизонтальной плоскости. Функция φ и координаты предполагаются соответствующим образом обезразмеренными. Указанный круглый солитон волн Россби был экспериментально наблюден Незлиным с сотрудниками [3] при его возбуждении некоторыми внешними факторами. Вместе с тем в других экспериментах тех же авторов [4] в условиях неустойчивости типа Кельвина – Гельмгольца наблюдалась нелинейная структура, которую можно трактовать как цепочку солитонов Россби, движущихся друг за другом (в виде "колонны") в направлении симметрии системы, т. е. по азимуту установки (см. рис. 2 работы [4]). В связи с этим представляет интерес выяснить, не описывает ли уравнение (1), помимо отдельного круглого солитона, также цепочку солитонов, аналогичную наблюденной в [4]. Покажем, что это так и есть[1)].

[1)] Недавно в [5, 6] рассматривались также цепочки солитонов в ситуациях, описываемых уравнением типа Кадомцева – Петвиашвили [7].

В связи с тем, что отыскание точного аналитического решения двумерного уравнения (1) не представляется возможным, найдем его приближенное решение, полагая

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)\cos ky. \qquad (2)$$

Здесь k – некоторый искомый параметр, φ_0 и φ_1 – искомые функции, такие, что $\varphi_1 < \varphi_0$; x – направление неоднородности, y – направление симметрии невозмущенного состояния. Используя (2) и приведенное неравенство, получаем из (1) следующие уравнения для φ_0 и φ_1:

$$\varphi_0'' - \varphi_0 + \varphi_0^2 = 0, \qquad (3)$$

$$\varphi_1'' - (1 + k^2)\varphi_1 + 2\varphi_0\varphi_1 = 0, \qquad (4)$$

где штрих – производная по x. Решение (3), ограниченное при $|x| \to \infty$, хорошо известно (см., например, [8])

$$\varphi_0 = \frac{3}{2}\mathrm{ch}^{-2}(x/2). \qquad (5)$$

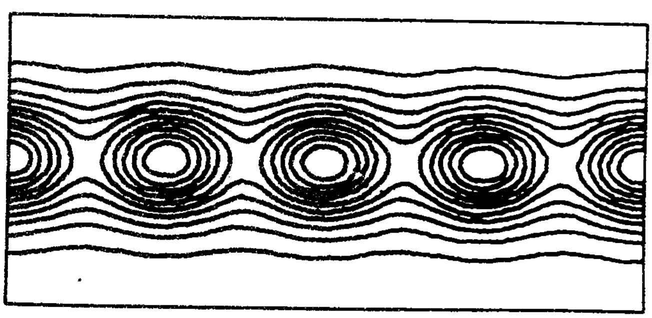
Подставляя (5) в (4) и требуя ограниченности φ_1 при $|x| \to \infty$, находим (ср. с [9])

$$\varphi_1 = C\,\mathrm{ch}^{-3}(x/2), \quad k = \sqrt{5}/2, \qquad (6)$$

где C – некоторая константа. Из (2), (4), (5) следует, что интересующее нас решение имеет вид

$$\varphi = \frac{3}{2}\mathrm{ch}^{-2}(x/2)\left[1 + \frac{\epsilon\cos(\sqrt{5}\,y/2)}{\mathrm{ch}(x/2)}\right], \qquad (7)$$

где ϵ – произвольный малый параметр.



Линии уровня φ = const качественно представлены на рисунке. В соответствии с [1, 2], линии уровня φ совпадают с линиями возмущенного движения жидкости. Поэтому рисунок свидетельствует о том, что решение (7) описывает цепочки солитонов Россби, аналогичные наблюдавшимся в [4]. Сказанное, однако, не следует понимать как адекватную интерпретацию экспериментов [4], поскольку исходное уравнение (1) не учитывает неустойчивость типа Кельвина – Гельмгольца, имевшую место в условиях [4].

Уравнение вида (1) описывает также довольно широкий класс нелинейных градиентных волн в плазме, находящейся в магнитном поле, в том числе так называемые дрейфовые волны [8]. Ранее было показано, что такие волны могут проявляться как круглые (цилиндрически симметричные) дрейфовые солитоны. В [8] обсуждался также вопрос об одномерных дрейфовых солитонах, описываемых электрическим потенциалом вида (5) и отмечалось, что такие солитоны неустойчивы относительно возмущений, неоднородных по y. Найденная нами нелинейная структура в виде цепочки солитонов (7), по-видимому, может вознаблюдать в результате развития неустойчивости, рассмотренной в [8], а также вследствие каких-либо других неустойчивостей.

Учитывая сказанное об аналогии уравнений для волн Россби и нелинейных дрейфовых волн и экспериментальный результат [4] о цепочке солитонов Россби, можно думать, что в соответствующих экспериментах по дрейфовым волнам также должны наблюдаться цепочки солитонов. В связи с этим представляется интересным замечание Н.С.Бучельниковой (частное сообщение), что, возможно дрейфовые солитоны реализовывались в экспериментах на Q-машинах [10], но этому вопросу в свое время не было уделено должного внимания.

Литература

1. *Петвиашвили В.И.* Письма в ЖЭТФ, 1980, **32**, 632.
2. *Михайлова Э.Н., Шапиро Н.Б.* Изв. АН СССР. Сер.: Физика атмосферы и океана, 1980, **16**, 823.
3. *Антипов С.В., Незлин М.В., Снежкин Е.М., Трубников А.С.* Письма в ЖЭТФ, 1981, **33**, 150.
4. *Незлин М.В., Снежкин Е.Н., Трубников А.С.* Письма в ЖЭТФ, 1982, **36**, 190.
5. *Зайцев А.А.* Докл. АН СССР, 1983, **272**, 583.
6. *Жданов С.К., Трубников Б.А.* Письма в ЖЭТФ, 1984, **39**, 110.
7. *Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.* Докл. АН СССР, 1970, **192**, 753.
8. *Петвиашвили В.И.* Физика плазмы, 1977, **3**, 270.
9. *Furth H.P.* Nucl. Fusion Suppl., 1982, **1**, 169.
10. *Бучельникова Н.С.* Исследование турбулентности плазмы при некоторых неустойчивостях. Новосибирск. Изд. ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1970.

Московский
физико-технический институт

Поступила в редакцию
15 июня 1984 г.