Письма в ЖЭТФ, том 40, вып. 7, стр. 296–298 *10 октября 1984 г.*

О ВОЗМОЖНОЙ АНОМАЛИИ ИНДУКТИВНОСТИ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А.П.Виноградов, А.Н.Лагарьков, А.К.Сарычев

В работе впервые обращается внимание на то, что композитные материалы наряду с индуктивностью, обусловленной формой образца, обладают внутренней индуктивностью, связанной с геометрией каналов протекания. Непосредственно вблизи порога протекания внутренняя индуктивность должна принимать большие значения. Рассматривается вопрос о влиянии внутренней индуктивности на электрофизические свойства композитов.

В работе рассматриваются композитные материалы, составленные из неупорядоченной смеси металла и диэлектрика. Проводимость таких материалов обращается в ноль при объемной концентрации металла p равной порогу протекания p_c. Вблизи p_c проводимость композитных систем $\sigma \sim \tau^t$, а диэлектрическая проницаемость $\epsilon \sim |\tau|^{-q}$, где $\tau = (p - p_c)/p_c$; $q = 0{,}75$ [1–3], $t = 1{,}8$ [4].

Особенности электрофизических свойств композитных материалов при концентрациях металла близких к p_c связаны с неоднородностью распределения тока по материалу: ток течет только по каналам протекания, которые образуют бесконечный кластер (БК). Характерный размер неоднородности, так называемый корреляционный радиус ξ, стремится к бесконечности при приближении к порогу протекания как $a_0|\tau|^{-\nu}$, где $\nu = 0{,}9$ [4], a_0 – микроскопический размер задачи. Для образцов с характерным размером A много большим ξ индуктивность L композитного образца можно записать в виде

$$L = \frac{V}{2I^2} \int \frac{\langle \mathbf{j}(0)\mathbf{j}(\mathbf{R}) \rangle}{R} d^3R,$$

где $\mathbf{j}(\mathbf{R})$ – плотность тока в точке $\mathbf{R}$, I – ток, протекающий через систему, $\langle \cdots \rangle$ – усреднение по объему, V – полный объем системы. Рассмотрим величину $L_{\text{вн}}$ – вклад в индуктивность, обусловленный лишь внутренним строением каналов протекания. Для этого из L вычтем $L_{\text{од}}$ – индуктивность однородной системы, имеющей ту же форму. Величину $L_{\text{вн}}$ можно выразить через удельную внутреннюю индуктивность l, определяемую следующим образом:

$$l = \frac{\langle \mathbf{j}^2 \rangle}{\langle \mathbf{j} \rangle^2} \int \frac{G_i(R)}{R} d^3R; \qquad G_i(R) = \frac{\langle \mathbf{j}(0)\mathbf{j}(\mathbf{R}) \rangle - \langle \mathbf{j}(\mathbf{R}) \rangle^2}{\langle \mathbf{j}^2(\mathbf{R}) \rangle}, \tag{1}$$

где $G_i(R)$ – является пространственной корреляционной функцией токов. Для образца с постоянной площадью сечения S, $L_{\text{вн}} = lA/S$. Величина l аналогична удельному сопротивлению, она не зависит от формы образца и поэтому может рассматриваться как электрофизическая характеристика неупорядоченной системы.

Ясно, что $G_l(R)$ существенно отлична от нуля на расстояниях меньших ξ и быстро убывает при дальнейшем увеличении R. Поскольку единственным характерным масштабом в задаче является корреляционный радиус ξ, то естественно предположить, что $G_l(R) \sim \sim (R/a_0)^{-(1+\theta)}$ при $a_0 < R < \xi$ и $G_l(R) \sim \exp(-R/\xi)$ при $R > \xi$. Легко показать, что для бинарной смеси $< \mathrm{j}^2 > / < \mathrm{j} >^2 \sim \sigma_{eff}^{-1} \sim \tau^{-t}$. Тогда, используя (1), получим, что величина l вблизи p_c ведет себя как $a_0^2 \tau^{-m}$, где $m = t + \nu(1-\theta)$ если $\theta < 1$, и $m = t$ если $\theta > 1$. Очевидно, что $G_l(R)$ должна спадать с расстоянием, поэтому $\theta \geqslant -1$. Окончательно

$$t \leqslant m \leqslant t + 2\nu. \tag{2}$$

Для дальнейшей оценки критического индекса m будем считать, следуя [6,7], что БК вблизи порога протекания представляет собой сетку с характерным расстоянием между узлами порядка ξ, узлы которой соединены одножильными макросвязями длиной $\mathcal{L} \sim \tau^{-\zeta}$, $\zeta = 1{,}3$ [8,9]. Так как $\zeta > \nu$, то при $|\tau| \ll 1$ величина $\mathcal{L} \gg \xi$, следовательно, макросвязь сильно закручена и должна обладать большой индуктивностью. Наличие в БК задублированных участков – "капель" [5], не влияет на оценку индуктивности, так как вклад капли в индуктивность порядка ее размера, т. е. кратчайшего пути по капле. Вообще говоря, макросвязь состоит из витков всех масштабов: виток масштаба $2h$ получается из $k = 2^{\zeta/\nu}$ витков масштаба h и т. д. [5]. Отсюда можно получить рекурентное соотношение между индуктивностью макросвязи масштаба $2h$ и h: $L_{\text{мксв}}(2h) = kL_{\text{мксв}}(h) + f(h)$, где $f(h)$ – это сумма собственной индуктивности витков масштаба $2h$ и их взаимоиндукции с витками меньших масштабов. Полагая $f(h) \sim h^{\alpha}$ получаем

$$m = \max\{\zeta + \nu, \alpha + \nu\} \geqslant \zeta + \nu = 2{,}2 > 2\nu = 1{,}8. \tag{3}$$

Исходя из (3) оценим вклад $L_{\text{вн}} \sim lA/S$ в полную индуктивность. Величина $L_{\text{од}}$ по порядку величины равна A, отсюда $(L_{\text{вн}}/L_{\text{од}}) \sim (\xi/A)^2 \tau^{-(m-2\nu)}$. Таким образом $L_{\text{вн}}$ сравнима с $L_{\text{од}}$ только при $\xi \sim A\tau^{(m-2\nu)/2}$.

Предположим далее, что к системе приложено внешнее электрическое поле, удовлетворяющее условиям квазистационарности $\lambda > \xi$, где $\lambda = 2\pi c/\omega$ длина волны. При $p < p_c$ БК распадается на конечные фрагменты размером ξ. Если $\omega < \sigma_{\text{м}} |\tau|^t$ [1)], то ток течет в основном по металлическим каналам, при этом места разрыва БК замыкаются токами смещения [1,2]. Исходя из этой картины распределения токов, можно предположить, что вид корреляционной функции $G_l(R)$, а вместе с этим и зависимость l от p ниже и выше p_c одинаковы и не зависят от частоты. При приближении к p_c увеличивается характерный размер ξ фрагментов БК, а относительное расстояние между ними убывает. Это приводит к росту эффективной диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}_{eff}$. Одновременно с ростом $\hat{\epsilon}_{ff}$ увеличивается и индуктивность фрагментов БК. Заметим, что величина $\hat{\epsilon}_{eff}$ получается при усреднении по масштабам порядка ξ, и не должна зависеть от внешней геометрии. Таким образом в величину $\hat{\epsilon}_{eff}$ входит именно l, в то время как для определения $L_{\text{од}}$ необходимо решать уравнения Максвелла, в которые подставлено значение $\hat{\epsilon}_{eff}$ с учетом l. Повторяя рассуждения [2], можно привести следующую оценку:

$$\hat{\epsilon}_{eff} = \epsilon'_{eff} + i\epsilon''_{eff} \sim \tau^{-q} \Bigg/ \left\{\left[1 - \left(\frac{2\pi a_0}{\lambda}\right)^2 \tau^{-(m+q)}\right] - i\frac{\omega}{\sigma_{\text{м}}}\tau^{-(q+t)}\right\}. \tag{4}$$

В пренебрежении индуктивностью каналов протекания ϵ'_{eff} монотонно возрастает при $p \to p_c - 0$. Учет l качественно меняет зависимость ϵ'_{eff} от p: при $\tau \sim \tau^* =$

---

1) $\sigma_{\text{м}}$ – проводимость металла.

$= (2\pi a_0/\lambda)^{2/(m+q)}$ может наблюдаться резонанс. В окрестности τ^* величина ϵ'_{eff} будет убывать, обращаться в нуль и даже может менять знак. Подчеркнем, что приведенные рассуждения корректны только в том случае, если корреляционный радиус ξ меньше чем длина волны в среде $\lambda_{cp} = \lambda/\sqrt{\epsilon'_м}$, где $\epsilon_м$ – максимальное значение ϵ'_{eff} из (5). В случае, когда $\xi > \lambda_{cp}$ вопрос об электрофизических свойствах композитов остается открытым.

Авторы признательны Б.И.Шкловскому и С.П.Обухову за полезное обсуждение работы.

Литература

1. *Efros A.L., Shklovskii B.I.* Phys. Stat. Sol. (b) 1976, **76**, 475.
2. *Дубров В.Е., Левинштейн М.Е., Шур М.С.* ЖЭТФ, 1976, 70, 2014.
3. *Виноградов А.П., Каримов А.М., Кунавин А.Т., Лагарьков А.Н., Сарычев А.К., Стембер Н.А.* ДАН СССР, 1984, **275**, 590.
4. *Шкловский Б.И., Эфрос А.Л.* Электронные свойства легированных полупроводников. М.: Наука, 1979.
5. *Виноградов А.П., Сарычев А.К.* ЖЭТФ, 1983, **85**, 1144.
6. *Скал А.С., Шкловский Б.И.* ФТП, 1974, **8**, 1586.
7. *de Gennes P.G.* J. de Physique, 1976, **37**, L1.
8. *Kirkpatrick S.* Proc. AIP Conf., 1979, **58**, 79.
9. *Sarychev A.K., Vinogradoff A.P.* J. Phys., 1979, **C12**, L681.

Поступила в редакцию
26 апреля 1984 г.
После переработки
13 августа 1984 г.

Институт высоких температур
Академии наук СССР