

ПО ИТОГАМ ПРОЕКТОВ
РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Проекты РФФИ # 01-02-17102 и # 03-02-17054

Блоховские электроны в магнитном поле. Топология квантовых состояний и транспорт

В. Я. Демиховский¹⁾

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 14 октября 2003 г.

Изучаются квантовые состояния, а также холловские кондактансы электронов в гетеропереходах n -типа и дырок в гетеропереходах p -типа, находящихся в поле латеральной сверхрешетки и перпендикулярном магнитном поле. Показано, что в периодическом потенциале, не обладающем центром инверсии, энергетический спектр магнитных подзон не симметричен по отношению к замене знака квазиимпульса. Исследуются особенности волновых функций и связанные с ними топологические инварианты, определяющие холловский кондактанс. Развита метод расчета блоховских магнитных состояний дырок, описываемых гамильтонианом Латтинжера, что позволило учесть спин и спин-орбитальное взаимодействие в этой задаче. Определен закон квантования холловского кондактанса 2D дырок в периодическом потенциале сверхрешетки.

PACS: 71.20.Nr, 71.70.Di, 73.43.Cd

I. Введение

Задача о квантовых состояниях электронов, движущихся в периодическом потенциале и одновременно в постоянном магнитном поле, остается актуальной на протяжении нескольких последних десятилетий. Нетривиальный характер энергетического спектра этой проблемы обусловлен взаимодействием периодического потенциала кристаллической решетки, приводящего к формированию энергетических зон, и магнитного поля, стремящегося образовывать дискретные уровни Ландау. основополагающие результаты в этой области были получены еще в работах Харпера[1], Азбея[2], Ванье[3], а также Ховштадтера[4], который с помощью компьютера визуализировал спектр магнитного блоховского электрона, получивший впоследствии название “бабочка Ховштадтера”. Главным параметром, определяющим структуру спектра, здесь является магнитный поток Φ , проходящий через элементарную ячейку кристалла. Если этот поток, измеренный в квантах магнитного потока $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/|e|$, равен рациональной дроби p/q , причем p и q – взаимно простые числа, то можно ввести новые единичные векторы трансля-

ции, определяющие магнитную элементарную ячейку и, соответственно, новую магнитную зону Бриллюэна [5, 6]. Здесь c – скорость света, e – модуль заряда электрона. Например, если векторный потенциал, соответствующий магнитному полю \mathbf{H} , направленному по оси z , выбран в калибровке Ландау $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$, то магнитные трансляции на простой квадратной решетке с периодом a будут определены как $x \rightarrow x + qna$, $y \rightarrow y + ta$, где n и t – целые числа. При этом в двумерной задаче форма магнитной зоны Бриллюэна будет задана неравенствами

$$-\pi/qa \leq k_x \leq \pi/qa, \quad -\pi/a \leq k_y \leq \pi/a. \quad (1)$$

В том случае, когда квазиволновой вектор пробегает все значения в магнитной зоне Бриллюэна (1), энергия изменяется в пределах одной магнитной подзоны. Число подзон также зависит от величины магнитного потока через элементарную ячейку кристалла. Если этот поток (измеренный в квантах потока) равен p/q , то отдельный уровень Ландау расщепляется на p энергетических подзон. Необычными свойствами обладают и волновые функции магнитных блоховских электронов. Так закон, по которому преобразуются эти функции при магнитных трансляциях, или закон Блоха–Пайерлса, имеет вид [7]

¹⁾e-mail: demi@phys.unn.ru

$$\psi_{k_x, k_y}(x, y) = \psi_{k_x, k_y}(x + qa, y + a) \times \exp(-ik_x qa) \exp(-ik_y a) \exp(-2\pi i r y/a). \quad (2)$$

Отсюда вытекают и необычные топологические свойства магнитных блоховских функций. Топологические аспекты рассматриваемой проблемы обсуждались Новиковым [8]. Им было показано, что образование p магнитных подзон вблизи одного уровня Ландау можно трактовать как векторное расслоение магнитных блоховских функций на T^2 торе, то есть на магнитной зоне Бриллюэна. Та же проблема обсуждалась Авроном, Сейлером и Саймоном в рамках теории гомотопии [9]. Саймоном [10] была установлена связь между топологическими инвариантами и геометрической фазой Берри [11]. Комото показал, что холловский кондактанс магнитных подзон определяется типом особенностей волновой функции и что эта величина пропорциональна первому числу Черна [12]. Позже было установлено, что холловский кондактанс в духе формулы Кубо можно представить как двумерный (2D) интеграл по магнитной зоне Бриллюэна. Последний получил название “кривизна Берри” [13–15]. Универсальная роль топологических инвариантов в квантовом эффекте Холла была продемонстрирована также для систем с беспорядком на подложке [16] и в задаче с многочастичным взаимодействием [17].

Необычный характер квантовых состояний блоховских электронов, находящихся в сильном магнитном поле, приводит к ряду интересных физических эффектов. В частности, в ряде теоретических и экспериментальных работ были обнаружены необычные правила квантования холловского кондактанса 2D электронного газа, находящегося в дополнительном периодическом потенциале. Как показали Таулес и др. [18], холловский кондактанс 2D электронного газа, в котором уровень Ферми попадает в r -ю запрещенную зону N -го уровня Ландау, равен

$$\sigma_H = \frac{e^2}{h}(t_r + N - 1), \quad (3)$$

где t_r есть целое число, являющееся решением уравнения Диофанта:

$$t_r p + s_r q = r, \quad (4)$$

которое имеет целочисленные решения при s_r , удовлетворяющих неравенству $|s_r| \leq p/2$.

Другой метод расчета холловской проводимости 2D электронного газа в присутствии периодического потенциала был развит Стржедой [19]. Он показал, что в том случае, когда уровень Ферми находится

в области энергетической щели между двумя заполненными подзонами, эта проводимость определяется выражением

$$\sigma_H = ec \frac{\partial N(E)}{\partial B}, \quad (5)$$

где $N(E)$ – число квантовых состояний, приходящихся на единицу площади с энергией ниже щели. Уравнение Диофанта так же, как и формула Стржеды неоднократно использовались для расчетов проводимости электронного газа в присутствии дополнительного периодического потенциала (см., например, [20, 21]). Эти подходы использовались и при исследовании 3D систем [22–24], где обобщенная формула Стржеды известна как формула Комото–Гальперина–Ву [23].

Если речь идет об обычных 3D кристаллах, то для экспериментального наблюдения эффектов, связанных со специфическими блоховскими квантовыми состояниями, необходимо иметь магнитные поля порядка 10^4 Тл. Такие поля в настоящее время недостижимы. Впрочем, если период кристаллической решетки равен 5–6 Å, то уже в поле 2800 Тл, полученном в Федеральном ядерном центре (Саров) [25], поток через элементарную ячейку составит $p/q = 0.2–0.3$ кванта магнитного потока. В таких полях уже можно увидеть уширение уровней Ландау. Однако основные надежды обнаружить магнитные квантовые состояния и, в том числе, “увидеть” бабочку Ховштадтера связаны с использованием 2D искусственных кристаллов – решеток квантовых точек.

В последние годы структуры с 2D электронным газом, модулированным поверхностным потенциалом, привлекали внимание многих экспериментаторов. Периодический потенциал в таких структурах создается с помощью металлического затвора, формирующего ряды квантовых точек (антиточек). В этих системах исследовались как классические эффекты – соизмеримость периода решетки и циклотронного радиуса [26, 27], переход к хаотическому режиму и т.д., так и наблюдались спектры, состоящие из магнитных подзон. В последнем случае периоды сверхрешеток составляли 100 нм и меньше, причем электронная подвижность в них была достаточно высокой. Магнитные поля в таких экспериментах имеют порядок 1 Тл. Впервые расщепление магнитных уровней на подзоны в гетеропереходе n -типа с поверхностной сверхрешеткой было обнаружено, по видимому, в работе [28]. Затем спектр, состоящий из магнитных подзон наблюдался авторами [21], также исследовавшими магнитосопротивление гетероперехода с поверхностной сверхрешеткой. Отметим также недавнюю работу [29], в которой структура маг-

нитных подзон изучалась в условиях, когда существенны взаимодействия между соседними уровнями Ландау.

Настоящая работа посвящена изучению квантовых состояний электронов и дырок, находящихся в гетеропереходах с поверхностной сверхрешеткой и во внешнем постоянном магнитном поле. В электронной задаче рассматриваются периодические потенциалы без центра инверсии и показано, что в такой ситуации энергетический спектр магнитных подзон не симметричен по отношению к замене знака квазиимпульса. Развита метод расчета магнитных квантовых состояний дырок валентной зоны, описываемых гамильтонианом Латтинжера, что позволило учесть спин и спин-орбитальное взаимодействие. Исследуются топологические инварианты, определяющие законы квантования холловского кондактанса 2D электронов и дырок.

II. Магнитные блоховские состояния и холловский кондактанс 2D электронного газа в периодическом потенциале без центра инверсии

В отсутствие магнитного поля энергетический спектр электрона, движущегося в периодическом потенциале, инвариантен относительно замены знака квазиимпульса на противоположный, то есть $E(\mathbf{k}) = E(-\mathbf{k})$. Такая симметрия имеет место даже в том случае, когда периодический потенциал не обладает центром инверсии. Симметрия в пространстве квазиимпульса возникает вследствие инвариантности стационарного уравнения Шредингера к замене знака времени. В магнитном поле симметрия $t \rightarrow -t$ нарушается. Как следствие, в кристалле без центра инверсии в присутствии магнитного поля энергия блоховского электрона не будет четной функцией квазиимпульса, определенного в магнитной зоне Бриллюэна. Можно ожидать, что кристалл, в котором энергетический спектр не симметричен в \mathbf{k} -пространстве, обладает необычными физическими свойствами [30].

Отметим, что нарушение симметрии периодического потенциала по отношению к пространственной инверсии и в классическом пределе отражается на транспортных характеристиках электронного газа. Это продемонстрировано, например, в работе [31], где экспериментально исследовался высокочастотный и низкочастотный электронные транспорты в квадратной 2D решетке, состоящей из точек, имеющих форму треугольника. Система находилась во внешнем магнитном поле. Классическая динамика электронов в такой решетке изучалась в работе [32]. При

облучении системы электромагнитным полем дальнего инфракрасного диапазона возникало постоянное напряжение, что связано с отсутствием центра инверсии потенциала.

Отметим, что в 3D кристаллах без пространственного центра инверсии симметрия энергетического спектра в \mathbf{k} -пространстве может быть нарушена и под влиянием спин-орбитального взаимодействия. Это происходит и в нулевом магнитном поле, когда симметрия $t \rightarrow -t$ не нарушена. При этом остается лишь крамеровское вырождение $E(\mathbf{k}, 1/2) = E(-\mathbf{k}, -1/2)$. В полупроводниках подобные спектры описываются, например, гамильтонианом Латтинжера, в который включены линейные и кубические по проекциям волнового вектора члены Дрессельхауса. Однако спин-орбитальный механизм нарушает симметрию только в малой области \mathbf{k} -пространства. Ниже мы увидим, что в периодическом потенциале без центра инверсии симметрия спектра магнитных подзон нарушается во всей магнитной зоне Бриллюэна.

А. Выбор модели. Далее будет проведен расчет квантовых состояний и рассмотрен закон квантования холловского кондактанса электронного газа в периодическом потенциале без центра инверсии [30]. Представим гамильтониан электрона, находящегося в однородном магнитном поле и в поле двумерного периодического потенциала, в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V(x, y), \quad (6)$$

где

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m^*} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 \quad (7)$$

есть гамильтониан в магнитном поле. Здесь c – скорость света, e – заряд электрона и m^* – его эффективная масса. Векторный потенциал выбран в калибровке Ландау $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$, так что магнитное поле \mathbf{H} параллельно оси z . Модельный потенциал квадратной решетки без центра инверсии запишем как

$$V(x, y) = V_1 \cos^2(\pi x/a) \cdot \cos^2(\pi y/a) + V_2 [\sin(2\pi x/a) + \sin(2\pi y/a)], \quad (8)$$

где a – период решетки. Линии постоянного значения этого потенциала построены на рис.1а. Второе слагаемое в правой части данного выражения, пропорциональное V_2 , определяет степень нарушения симметрии решетки по отношению к пространственной инверсии. При $V_2 = 0$ эта симметрия восстанавливается. Амплитуду V_1 мы будем в дальнейшем считать фиксированной.

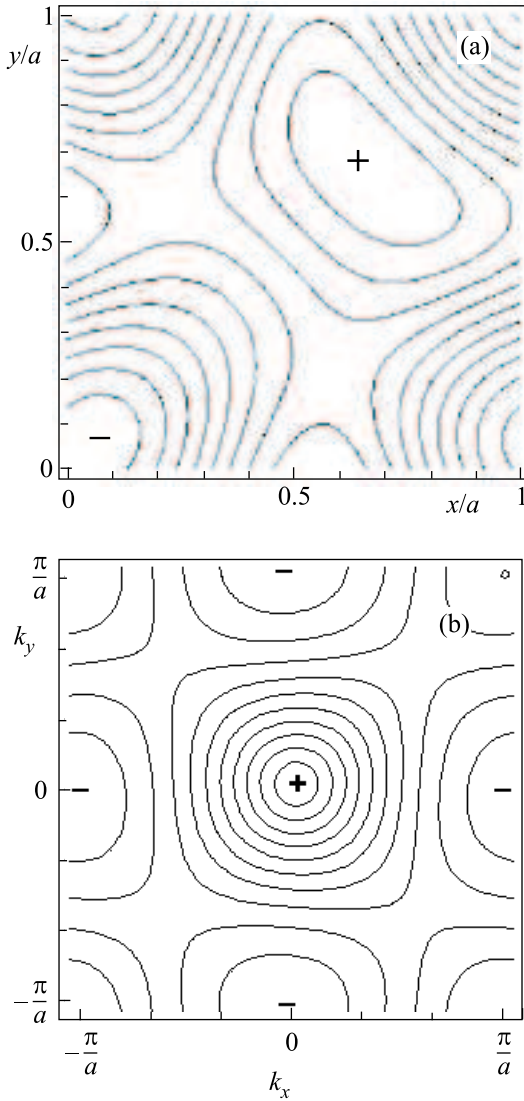


Рис.1. (а) Линии постоянного значения потенциала кристаллической решетки $V(x, y)$, определяемого формулой (3), при $V_2/V_1 = 0.1$. Знаками “+” и “-” отмечены максимум и минимум потенциала; (б) изоэнергетические линии спектра $E_1^1(\mathbf{k}) = \text{const}$ нижней магнитной подзоны, относящейся к первому уровню Ландау $N = 1$ при $V_2/V_1 = 0.1$, $p/q = 3/1$. Знаками “+” и “-” отмечены положения максимума и минимума энергии в подзоне

Структура собственных состояний гамильтониана (6) и спектр его собственных значений, как уже было отмечено выше, зависят от величины магнитного потока через элементарную ячейку кристаллической решетки. Мы всегда будем предполагать, что магнитный поток p/q является рациональным числом. В противном случае спектр состоял бы из бесконечного числа магнитных подзон и имел фрактальную структуру [4]. При выполнении неравенств

$$\hbar\omega_c \gg V_1, V_2; \quad l_H \ll a, \quad (9)$$

где l_H и ω_c есть магнитная длина и циклотронная частота, соответственно, расчет квантовых состояний может быть выполнен в рамках теории возмущений, то есть без учета взаимодействия между различными уровнями Ландау. Простая оценка показывает, что для решетки с периодом $a = 80$ нм, условие $p/q = 3$ выполняется в магнитном поле $H \simeq 2$ Тл и неравенства (9) будут удовлетворены при значениях амплитуд $V_1, V_2 \approx 1$ мэВ. Волновую функцию электрона из μ -й магнитной подзоны, удовлетворяющую условиям Блоха-Пайерлса, будем искать в виде разложения по функциям Ландау, относящимся к N -му уровню [18]:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{k}, \mu}^N(x, y) &= \\ &= \sum_{n=1}^p C_{n\mu}^N(\mathbf{k}) \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \varphi_N \left[\frac{x - x_0 - \ell qa - nqa/p}{l_H} \right] \times \\ &\quad \times e^{ik_y y} e^{ik_x (\ell qa + nqa/p)} e^{2\pi i y (\ell p + n)/a}, \end{aligned} \quad (10)$$

где φ_N – собственная функция гармонического осциллятора, $x_0 = c\hbar k_y / |e|H = k_y l_H^2$. Отметим, что условие (2) будет выполнено, если коэффициенты разложения (10) удовлетворяют соотношению

$$C_{n+p, \mu}^N(\mathbf{k}) = C_{n\mu}^N(\mathbf{k}). \quad (11)$$

В представлении функций (10) стационарное уравнение Шредингера $\hat{H}\Psi = E\Psi$ запишется как

$$\begin{aligned} H_{nm}^N(\mathbf{k}) C_{m\mu}^N(\mathbf{k}) &= \\ &= [E_N^0(p/q) \delta_{nm} + V_{nm}^N(p/q, \mathbf{k})] C_{m\mu}^N = \\ &= E_{\mu}^N(\mathbf{k}) C_{n\mu}^N(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (12)$$

где $E_N^0 = \hbar\omega_c(N + 1/2)$.

Вследствие периодичности (11) по n и m с периодом p можно считать, что трехдиагональная матрица V_{nm}^N в уравнении (12) имеет размеры $(p \times p)$ [30], откуда следует, что при рациональных значениях потока p/q каждый дискретный магнитный уровень расщепляется на p магнитных подзон. Далее мы перейдем к расчету волновых функций и спектра.

Б. Квантовые состояния. При простых рациональных значениях потока энергетический спектр и волновые функции $C_{n\mu}^N(\mathbf{k})$ без труда находятся аналитически. В случае больших размеров гамильтонической матрицы диагонализация может быть проведена численно. В работе автора и Перова [30] были аналитически рассчитаны квантовые состояния магнитных блоховских электронов в решетке без центра инверсии для потока $p/q = 3/1$. На рис.1б представлены изоэнергетические линии рассчитанного спектра,

который, как видно, не обладает центром инверсии в \mathbf{k} -пространстве. Рисунок демонстрирует распределение энергии в низшей из трех магнитных подзон, относящихся к уровню Ландау с номером $N = 1$. Нетрудно показать, что при изменении направления магнитного поля ($\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}$) спектр преобразуется следующим образом:

$$E_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{H}) = E_\mu(-\mathbf{k}, -\mathbf{H}).$$

Несмотря на асимметрию спектра, на противоположных границах магнитной зоны Бриллюэна равны энергии

$$E_\mu(k_x, \pi/a) = E_\mu(k_x, -\pi/a),$$

$$E_\mu(\pi/qa, k_y) = E_\mu(-\pi/qa, k_y)$$

и соответствующие частные производные: $\partial E/\partial k_\alpha$, где $\alpha = x, y$. Однако из-за отсутствия центральной симметрии в центре и на границах магнитной зоны производные $\partial E/\partial k_\alpha$ не равны нулю. Структура энергетического спектра явно зависит от параметра V_2 . Как было показано в [30], при некоторых критических значениях V_2^{cr} , энергетическая щель между соседними подзонами исчезает и поверхности $E_\mu^N(\mathbf{k})$ касаются друг друга в некоторой точке \mathbf{k}_0 -пространства, лежащей на диагонали магнитной зоны Бриллюэна. Так, например, при $(V_2/V_1)^{cr} = 0.051706$ и $p/q = 3/1$ энергия в нижней подзоне нулевого уровня Ландау становится равной энергии средней подзоны. Это касание происходит в точке \mathbf{k}_0 , где энергия нижней подзоны максимальна. При дальнейшем увеличении параметра V_2 такое вырождение снимается и соседние магнитные подзоны остаются разделенными энергетической щелью. Ниже мы покажем, что при достижении V_2 критического значения, в момент коллапса энергетической щели, происходит скачкообразное изменение особенностей собственного вектора системы (12) $C_{n\mu}^N(\mathbf{k})$ в \mathbf{k} -пространстве. Одновременно изменяются и топологические инварианты – классы Черна, определяющие холловский кондактанс.

Собственные векторы $C_{n\mu}^N(\mathbf{k})$ можно выбрать пропорциональными алгебраическим дополнениям $D_{jn}(\mathbf{k})$ любой (например, j -й) строки определителя системы (12) при $E = E_\mu(\mathbf{k})$. Как показано Усовым [33], в такой записи компоненты нормированного собственного вектора есть

$$C_n^{(j)}(\mathbf{k}) = R_n^{(j)}(\mathbf{k}) \exp(i\phi_n^{(j)}(\mathbf{k})),$$

$$R_n^{(j)}(\mathbf{k}) = \left(D_{nn}(\mathbf{k}) / \sum_{s=1}^p D_{ss}(\mathbf{k}) \right)^{1/2}, \quad n \neq j. \quad (13)$$

В последней формуле величина $D_{nn}(\mathbf{k})$ – это алгебраическое дополнение матричного элемента $[H_{nn}^N - E_\mu^N]$, а фаза $\phi_n^{(j)}(\mathbf{k})$ определена соотношениями

$$\cos \phi_n^{(j)} = \frac{\text{Re } D_{jn}}{|D_{jn}|}, \quad \sin \phi_n^{(j)} = \frac{\text{Im } D_{jn}}{|D_{jn}|}, \quad n \neq j. \quad (14)$$

Легко убедиться, что компонента $C_j^{(j)}(\mathbf{k})$ является чисто действительной и что она обращается в нуль в точках \mathbf{k}_m так называемой расширенной магнитной зоны Бриллюэна, определяемой неравенствами $-\pi/qa \leq k_x \leq \pi/qa$, $-\pi p/qa \leq k_y \leq \pi p/qa$ [33]. Другие компоненты $C_n^{(j)}(\mathbf{k}_m)$, где $(n \neq j)$, не имеют определенного предела при $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_m$ и можно сказать, что соответствующая точка \mathbf{k}_m является точкой ветвления фазы. Всюду в дальнейшем индекс в скобках будет характеризовать представление, то есть номер строки, и одновременно мы будем опускать индексы магнитной подзоны μ и номера уровня Ландау N .

В. Квантование холловского кондактанса.

Холловский кондактанс 2D электронов, на которые действует периодический потенциал и которые полностью заполняют несколько магнитных подзон так, что уровень Ферми лежит в области энергетической щели, квантован в единицах e^2/h . Вообще говоря, можно было бы предположить, что холловский кондактанс каждой подзоны будет равен e^2/ph , где p – число магнитных подзон, а e^2/h – кондактанс нерасщепленного уровня Ландау, но это не так. Согласно известным аргументам Лафлина, каждая магнитная подзона должна переносить холловский ток, кратный току всего заполненного уровня Ландау. Природу такого квантования холловского кондактанса при наличии дополнительного периодического потенциала поясним на простой модели, введенной в работе Таулеса и др.[18]. Для этого предположим, что прямоугольная решетка сильно анизотропна, так что интегралы перекрытия в направлении x много меньше, чем интегралы перекрытия по y . Пусть теперь электрическое поле направлено по оси y . Тогда компонента волнового вектора k_y будет монотонно изменяться во времени и, в соответствии с определением x_0 , будет происходить также монотонное изменение координаты, задающей положение центра собственной функции гармонического осциллятора $\varphi_N(x - x_0)$. В результате возникает электрический ток в направлении x . Однако положение $\varphi_N(x)$ зависит не только от x_0 , но, как видно из (10), оно может изменяться и с номером n . Если при заданном k_y в некоторой магнитной подзоне доминирует компонента собственного вектора C_n , то в дальнейшем, когда при изменении k_y расстояние между соседними подзона-

ми станет минимальным, роль доминирующей компоненты перейдет от C_n к другой компоненте, C_{n+s} , где s – целое число. В этот момент соответствующая осцилляторная функция в (10) скачкообразно переместится в направлении x на расстояние $sq a/p$. Для случая простого параболического одномерного спектра, как было показано в [18], величина s может быть найдена как решение уравнения Диофанта (4). Тогда для расчета полной холловской проводимости достаточно проследить за изменением k_y в пределах всей одномерной зоны Бриллюэна и учесть как монотонное, так и все скачкообразные перемещения центра волновой функции вдоль оси x . К сожалению, не ясно, как можно обобщить эти простые рассуждения на случай более реалистического потенциала. Поэтому мы будем в дальнейшем рассматривать другие подходы, основанные на использовании формулы Кубо.

В отсутствие разупорядочения и при нулевой температуре вклад подзоны α в холловскую проводимость дается следующей формулой, которая является прямым следствием формулы Кубо [18, 33, 12]:

$$\sigma_{xy}^{\alpha} = \frac{e^2}{\pi^2 \hbar} \int \text{Im} \left\langle \frac{\partial u_{\mathbf{k}}}{\partial k_y} \left| \frac{\partial u_{\mathbf{k}}}{\partial k_x} \right. \right\rangle d^2 k, \quad (15)$$

где $u_{\mathbf{k}} = \Psi_{k_x k_y}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ есть периодическая часть полной функции данной подзоны. Отсюда может быть получено сравнительно простое явное выражение для проводимости заполненной магнитной подзоны, относящейся к N -му уровню Ландау [33]:

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{h} \left[\frac{1}{p} + \frac{q}{p} \sum_{\mathbf{k}_m} S(\mathbf{k}_m) \right]. \quad (16)$$

Здесь целое число $S(\mathbf{k}_m)$ определяется набегом фаз $\phi_n^{(j)}(\mathbf{k})$ (в единицах 2π) функций $C_n^{(j)}(\mathbf{k})$ в уравнении (7) при обходе по часовой стрелке особой точки \mathbf{k}_m .

В качестве примера в нашей работе [30] был проведен расчет холловской проводимости 2D электронного газа в магнитной подзоне при $p/q = 3/1$. Периодический потенциал был выбран в форме (8). Расчет собственных состояний гамильтониана (6) выполнялся в представлении первой строки детерминанта системы (12). Сечения и особенности функции $C_1^{(1)}(\mathbf{k})$, относящейся к расширенной магнитной зоне Бриллюэна, представлены на рис.2а и б. Величина отношения V_2/V_1 на этих двух рисунках соответственно ниже и выше критического значения. Другие основные параметры системы приведены в подписях к рисункам. Две особенности – точки ветвления фазы, где функция $C_1^{(1)}(\mathbf{k})$ обращается в нуль, обозначены буквами A и B (см. рис. 2а). Непосредственный расчет показал, что при обходе каждой из этих точек по

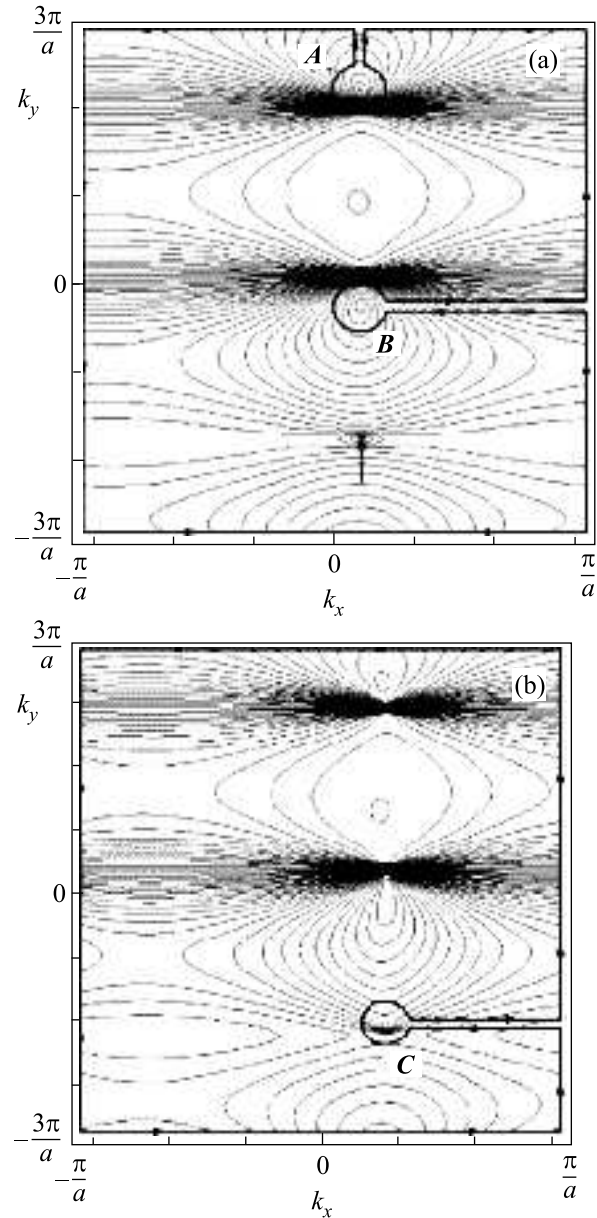


Рис.2. Линии постоянного значения и особенности действительной функции $C_1^{(1)}(\mathbf{k})$ в расширенной зоне Бриллюэна для уровня Ландау с $N = 0$ при $p/q = 3/1$: (а) $V_2/V_1 = 0.02$; (б) $V_2/V_1 = 0.06$

контуру, показанному на рисунке, фазы компонент $C_2^{(1)}(\mathbf{k})$ и $C_3^{(1)}(\mathbf{k})$ изменяются на $+2\pi$. Отсюда следует, что $S(\mathbf{k}_A) = S(\mathbf{k}_B) = 1$, и в соответствии с (16), кондуктанс в нижней зоне равен $\sigma_{xy} = -e^2/h$. Аналогично были рассчитаны вклады в проводимость и от других магнитных подзон. Оказалось, что проводимость заполненной средней и верхней подзон нулевого уровня Ландау равна нулю. Холловские кондуктансы при различных положениях уровня Ферми в магнитных подзонах для этого случая приведены

на рис.3 и отмечены цифрой 1. При изменении параметра V_2 особые точки A и B перемещаются в расши-

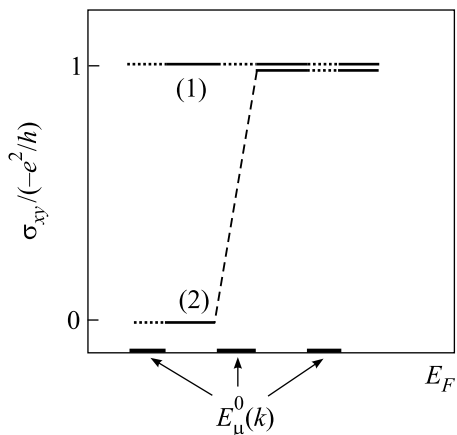


Рис.3. Холловский кондактанс заполненных магнитных подзон при различных положениях уровня Ферми: (1) – для значения V_2/V_1 ниже критического и (2) – выше критического; $N = 0, \mu = 1, 2, 3$

ренной зоне Бриллюэна, причем малым изменениям V_2 соответствуют малые перемещения особенностей. В соответствии с топологической природой инвариантов проводимость σ_{xy} изменяется скачкообразно только в момент касания (вырождения) в точке \mathbf{k}_0 ветвей спектра соседних подзон (в рассматриваемом случае речь идет о вырождении нижней и средней магнитных подзон). При критическом значении параметра V_2 особенности в точках A и B исчезают одновременно, так что функция $C_1^{(1)}(\mathbf{k})$ уже не обращается в нуль. В этот момент рождается новая особенность, обозначенная как C на рис.2b. Сценарий перестройки особенностей таков. Две исходные особые точки не аннигилируют и не выходят на границы расширенной зоны Бриллюэна. Просто в этот момент компонента $C_1^{(1)}(\mathbf{k})$ обращается в нуль в точке C , а две другие компоненты в точках A и B уже не равны нулю. Положение локального минимума функции $C_1^{(1)}(\mathbf{k})$ при $V_2 < V_2^{cr}$, который является зародышем будущей особенности C , отмечено стрелкой на рис.2a.

При обходе точки C вдоль контура, показанного на рис.2b, фаза каждой из компонент $C_2^{(1)}(\mathbf{k})$ и $C_3^{(1)}(\mathbf{k})$ изменяется на -2π и, в соответствии с (16), вклад нижней магнитной подзоны нулевого уровня Ландау в проводимость становится равным нулю. Для этого случая расположение холловских плато, соответствующих трем магнитным подзонам, обозначено на рис.3 цифрой 2. При этом вклад в проводимость, равный $-e^2/h$, дает средняя магнитная подзона с энергией $E_2(\mathbf{k})$, которая при критическом зна-

чении V_2^{cr} касается нижней энергетической зоны. В то же время ясно, что при $V_2 = 0$ вариация V_1 не сможет привести к изменению закона квантования холловской проводимости, важно лишь отношение этих коэффициентов. Таким образом, в кристаллах без центра инверсии реализуется новый закон квантования холловской проводимости, который вместе с топологическими параметрами может резко измениться при критических значениях параметра, характеризующего степень нарушения центральной симметрии.

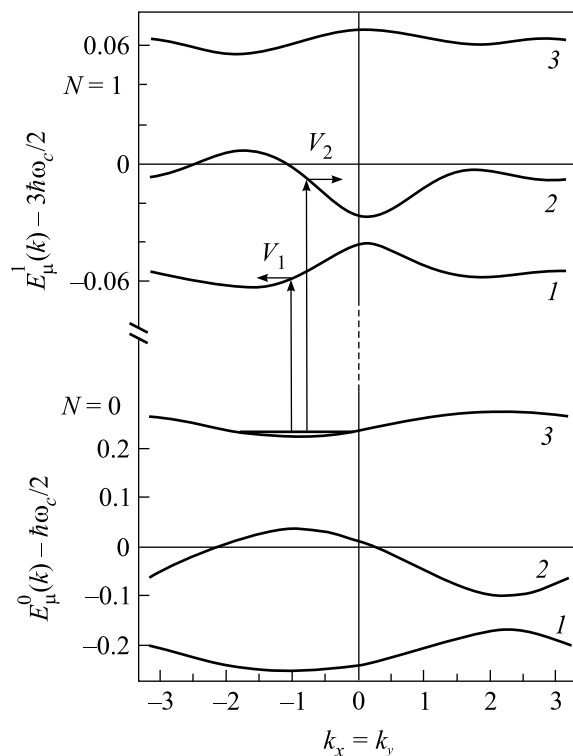


Рис.4. Квантовые переходы между магнитными подзонами в двумерном кристалле без центра инверсии. Стрелками показаны направления скорости в конечном состоянии

Г. Фотогальванический эффект. В отсутствие инверсионной симметрии в \mathbf{k} -пространстве должен иметь место так называемый фотогальванический эффект, то есть электромагнитная волна, распространяющаяся по нормали к поверхности гетероструктуры, должна вызывать постоянный электрический ток, текущий вдоль поверхности. Подобный эффект был предсказан и исследован экспериментально в полупроводниковых кристаллах без центра инверсии, где симметрия в \mathbf{k} -пространстве нарушена спин-орбитальным взаимодействием. Природу подобного

квантового фотогальванического эффекта, который должен наблюдаться в 2D газе электронов, помещенных в периодический потенциал без центра инверсии, иллюстрирует рис.4. Здесь отложена зависимость энергии $E_{\mu}^{0,1}(\mathbf{k})$ от компоненты квазиимпульса \mathbf{k} , ориентированной вдоль диагонали магнитной зоны Бриллюэна. Предполагается, что прямые электронные переходы происходят между магнитными подзонами, относящимися к нулевому и первому уровням Ландау. Верхняя подзона нулевого уровня $E_3^0(\mathbf{k})$ частично заполнена. Если энергия электромагнитного кванта такова, что переходы происходят в нижнюю подзону $E_1^1(\mathbf{k})$ первого уровня Ландау, то при облучении постоянный электрический ток потечет в направлении вектора групповой скорости $\mathbf{V}_1 = \partial E_1^1 / \partial \mathbf{k}$. При других резонансных энергиях электромагнитного кванта, например, в том случае, когда электронные переходы будут происходить в подзону $E_2^1(\mathbf{k})$, направление фототока будет противоположным. Здесь необходимо отметить, что в потенциале $V(\mathbf{r})$, не обладающем центром инверсии, разрешены дипольные переходы между магнитными подзонами, принадлежащими любым уровням Ландау. Данный эффект должен наблюдаться как при линейной, так и при круговой поляризации электромагнитного поля. Для оценки величины фотогальванического тока при заданном потоке квантов следует вычислить вероятности переходов и скорости в магнитных подзонах в конечных состояниях.

III. Квантовые состояния и холл-эффект в гетеропереходах *p*-типа с поверхностной сверхрешеткой

В последние годы был достигнут определенный прогресс в изготовлении низкоразмерных структур

p-типа на базе гетеропереходов GaAs/AlGaAs [34–36]. Благодаря этому, в дырочных 2D каналах стали наблюдаться практически те же эффекты, что и в структурах *n*-типа. Были выполнены также и первые эксперименты по изучению транспорта в поверхностно модулированном газе дырок [37]. В связи с этим нами были выполнены работы, посвященные исследованию квантовых состояний дырок в гетеропереходе с поверхностным потенциалом, находящемся в перпендикулярном магнитном поле, в которых изучались также квантовый и эффект Холла и магнитооптика [38, 39]. Расчет блоховских магнитных состояний дырок, проведенный в модели Латтинжера, интересен и тем, что здесь впервые в подобной задаче учитываются спин и спин-орбитальное взаимодействия заряженной частицы.

А. Спектр и волновые функции. Схема расчета. В присутствии внешнего магнитного поля $\mathbf{H} \parallel z$, которому отвечает векторный потенциал \mathbf{A} , легкие и тяжелые дырки вблизи гамма-точки описываются гамильтонианом Латтинжера. При этом компоненты волнового вектора $k_{\pm} = k_x \pm ik_y$ заменяются операторными выражениями:

$$k_{\alpha} \rightarrow \hat{k}_{\alpha} = -i \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} + \frac{e}{c} A_{\alpha}, \quad (17)$$

Кроме этого, члены, описывающие взаимодействие спинового момента κ с внешним магнитным полем, следует прибавить ко всем элементам главной диагонали. Переходя затем к операторам рождения и уничтожения, определенным как

$$\hat{a}^+ = \frac{R_c}{\sqrt{2}} \hat{k}_+, \quad \hat{a} = \frac{R_c}{\sqrt{2}} \hat{k}_-, \quad (18)$$

где $R_c = [c/eH]^{1/2}$, получим следующую матрицу:

$$\hat{H}_L = \begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & \bar{\gamma} \sqrt{3} (eH/c) \hat{a}^2 & \gamma_3 \sqrt{6eH/c} k_z \hat{a} & 0 \\ & \hat{H}_{22} & 0 & -\gamma_3 \sqrt{6eH/c} k_z \hat{a} \\ & & \hat{H}_{33} & \bar{\gamma} \sqrt{3} (eH/c) \hat{a}^2 \\ & & & \hat{H}_{44} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где

$$H_{11} = -(\gamma_1/2 - \gamma_2)k_z^2 - (eH/c) \left[(\gamma_1 + \gamma_2) \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2} \kappa \right] + V_h(z) + V(x, y),$$

$$H_{22} = -(\gamma_1/2 + \gamma_2)k_z^2 - (eH/c) \left[(\gamma_1 - \gamma_2) \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \kappa \right] + V_h(z) + V(x, y),$$

$$H_{33} = -(\gamma_1/2 + \gamma_2)k_z^2 - (eH/c) \left[(\gamma_1 - \gamma_2) \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \kappa \right] + V_h(z) + V(x, y),$$

$$H_{44} = -(\gamma_1/2 - \gamma_2)k_z^2 - (eH/c) \left[(\gamma_1 + \gamma_2) \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{2} \kappa \right] + V_h(z) + V(x, y).$$

Нижняя часть матрицы (19) связана с верхней эрмитовым сопряжением. Здесь e – модуль элементарного заряда, параметры Латтинжера далее принимают следующие значения: [34]: $\gamma_1 = 6.85$, $\gamma_2 = 2.1$, $\gamma_3 = 2.9$ и $\kappa = 1.2$, $V_h(z)$ – потенциал гетероперехода, $V(x, y)$ – периодический потенциал. Решением уравнения Шредингера с гамильтонианом Латтинжера (19) являются огибающие волновых функций, базисом для которых служат атомные функции p -типа, преобразующиеся как собственные функции оператора углового момента с числом $J = 3/2$. Будем считать, что дырки в гетеропереходе, выращенном в z -направлении, находятся в плавно изменяющемся потенциале $V_h(z)$. Предположим также, что $V_h(z)$ имеет треугольный профиль, а границу гетероперехода можно считать непроницаемой и накладывать граничное условие $\psi(0) = 0$. Поскольку треугольный профиль не обладает центром инверсии, то есть $V_h(z) \neq V_h(-z)$, двукратное вырождение по спину будет снято. Собственные векторы оператора (19), имеющие четыре компонента, записываются в базисе функций $|J; m_J\rangle$ [34]. Трансляционные свойства в плоскости (x, y) каждой из компонент огибающей функции такие же, как и у однокомпонентных электронных состояний, то есть каждая компонента удовлетворяет условию Блоха-Пайерлса (2). Поэтому компоненты огибающей $\psi_{k_x k_y}^j$ можно искать в виде суперпозиции квантовых состояний Ландау [18], а именно:

$$\begin{aligned} \psi_{k_x k_y}^j(\mathbf{r}) = & \frac{1}{La\sqrt{q}} \sum_{\nu} C^{\nu}(z) \sum_N \sum_{n=1}^p d_{j\nu N n} \times \\ & \times \sum_{l=-L/2}^{L/2} \phi_{Nj} \left(\frac{x - x_0 - lqa - nqa/p}{\ell_H} \right) \times \\ & \times \exp \left(ik_x \left[lqa + \frac{nqa}{p} \right] \right) \times \\ & \times \exp \left(2\pi iy \frac{lp + n}{a} \right) \exp(iky, y), \end{aligned} \quad (20)$$

Обсудим структуру дырочных функций (20). При проведении расчетов в сумме по ν обычно учитывается ограниченное число подзон размерного квантования, например, две подзоны тяжелых дырок и одну подзону легких дырок. Кроме того, в каждой такой подзоне учитывается конечное число уровней Ландау N . В наших расчетах оно изменялось от 7 до 11. Суммирование по n здесь, как и в выражении для электронной волновой функции, проводится в пределах от 1 до p .

После подстановки полной дырочной функции (20) в уравнение Шредингера с гамильтонианом (19) приходим к задаче на собственные значения с матрицей размером $Np \times Np$ для Np компонент $d_{j\nu N n}(k_x, k_y)$ в каждой из Np дырочных магнитных подзон $\varepsilon_{\nu N n}(k_x, k_y)$:

$$\begin{aligned} \sum_{j'\nu'N'n'} \left(H_{j\nu N n}^{j'\nu'N'n'} + V_{j\nu N n}^{j'\nu'N'n'}(p/q, k_x, k_y) \right) \times \\ \times d_{j'\nu'N'n'} = \varepsilon d_{j\nu N n}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь введено обозначение $H_{j\nu N n}^{j'\nu'N'n'}$ для матричных элементов гамильтониана (19) и $V_{j\nu N n}^{j'\nu'N'n'}(p/q, k_x, k_y)$ для элементов матрицы периодического потенциала (8) при $V_2 = 0$, взятых по функциям разложения (20). В работах [38, 39] была проведена диагонализация системы (21) для различных значений напряженности магнитного поля и амплитуд периодического потенциала. Максимальный размер матрицы (21), отвечающий $p/q = 20$, составлял 220×220 . Результаты этих расчетов используются в дальнейшем для определения холловского кондактанса (см. следующий раздел).

В заключение настоящего раздела следует упомянуть еще об одной интересной особенности собственных функций рассматриваемой задачи: каждая магнитная блоховская функция, удовлетворяющая условиям Блоха-Пайерлса (2), имеет в пределах одной магнитной ячейки как минимум p нулей (если поток через нее равен p/q). Это правило обобщается и на случай многокомпонентных волновых функций [39]. Именно, пусть $\theta_{\mathbf{k}}^j$ обозначает фа-

зу периодической составляющей для j -й компоненты $u_{\mathbf{k}}^j(\mathbf{r}) = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})\psi_{\mathbf{k}}^j(\mathbf{r})$ дырочной функции $\psi_{\mathbf{k}}^j(\mathbf{r})$, задаваемой (20). Тогда, аналогично электронной задаче [12], для каждой такой фазы можно ввести циркуляции Γ_j , определяемые следующим образом:

$$\Gamma_j = \frac{1}{2\pi} \oint d\mathbf{l} \frac{\partial \theta_{\mathbf{k}}^j(x, y)}{\partial \mathbf{l}}, \quad (22)$$

где контур интегрирования выбирается вдоль положительного направления обхода границы магнитной ячейки. Поскольку условия Пайерлса (2) выполняются одновременно для каждой компоненты дырочной волновой функции, представляется естественным, что циркуляции (22) оказываются равными для всех компонент:

$$\Gamma_j = -p, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (23)$$

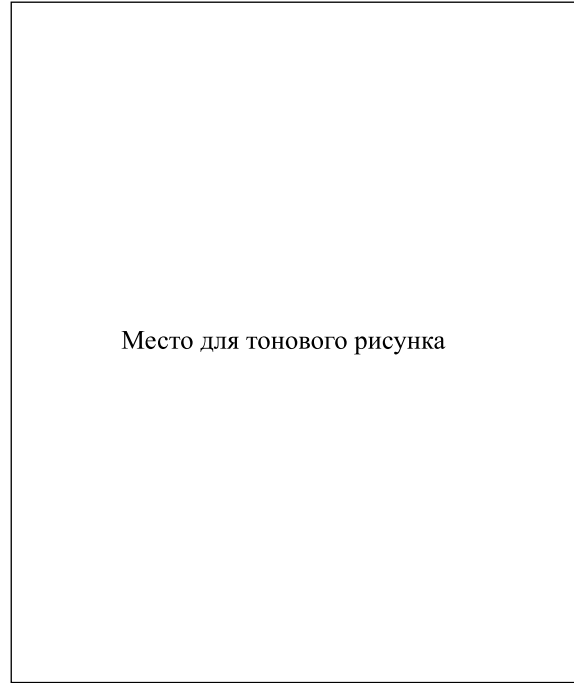
Расчет показал, что положения нулей различных компонент не совпадают, причем общее число нулей может быть как больше, так и меньше p , но значение полной циркуляции всегда фиксировано. Эти выводы иллюстрирует рис.5, где в плоскости x, y отложена плотность вероятности различных компонент волновой функции одной из подзон уровня Ландау с номером $N = 2+$ при значении потока $p/q = 5$. Черные кружки показывают положение и кратность нулей. Не вдаваясь в детали, отметим, что рассмотренные особенности волновой функции в координатном пространстве, так же как и особенности в пространстве импульсов σ_{Hn} , имеют топологическую природу, поскольку они не зависят от конкретного вида потенциала.

Б. Квантование холловской проводимости.

Как и для газа электронов, холловский кондактанс дырок квантован в единицах e^2/h , если уровень Ферми лежит в запрещенной зоне. Значение σ_H определяется суммой вкладов от всех подзон, расположенных под уровнем Ферми. Поэтому определим сначала холловский кондактанс одной полностью заполненной подзоны α . Для четырехкомпонентной функции (20) выражение (15) заменяется суммой четырех слагаемых:

$$\sigma_H^\alpha = \frac{e^2}{\pi^2 \hbar} \sum_{j=1}^4 \int \text{Im} \left\langle \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^j}{\partial k_y} \middle| \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^j}{\partial k_x} \right\rangle d^2 k, \quad (24)$$

где $u_{\mathbf{k}}^j = \Psi_{k_x k_y}^{(j)}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ определяется формулой (20). В работе [39] мы ограничились рассмотрением магнитных подзон, относящихся только к нижней зоне размерного квантования, которая при типичных концентрациях носителей только одна является заполненной. Высшие зоны размерного квантования



Место для тонового рисунка

Рис.5. Распределение плотности вероятности в точке $k_x = k_y = 0$ для четырех компонент волновой функции состояния с индексом $N = 2+$ при $p/q = 5$ (а)–(д). Темные области соответствуют большим значениям плотности вероятности. Положения нулей волновой функции отмечены черными кружками разного диаметра, соответствующего порядку нулей

не учитывались. Далее производилась подстановка дырочной функции $u_{\mathbf{k}}^j$ в выражение (24). Принимая во внимание ортогональность и нормировку базисных функций в (20), можно выразить (24) через частные производные компонент собственного вектора $d_{j\nu Nn}(k_x, k_y)$. Эта часть расчета выполняется аналогично подобной процедуре в электронной задаче с однокомпонентной функцией. Для краткости совокупность индексов $(j\nu Nn)$ у вектора $d_{j\nu Nn}(k_x, k_y)$ можно заменить на один индекс $n = 1, \dots, Np$, который последовательно пробегает все необходимые значения. В результате из (24) получается следующее выражение для σ_H :

$$\sigma_H = \frac{e^2}{\pi^2 \hbar} \int \text{Im} \left[\frac{i}{2} \ell_H^2 + \sum_{n=1}^{Np} \frac{\partial d_n^*}{\partial k_y} \frac{\partial d_n}{\partial k_x} \right] d^2 k, \quad (25)$$

которое приводится к выражению (16) тем же способом, что и в электронной задаче. Типичная картина распределения d_1 , а также $\text{Re } d_2$ и $\text{Im } d_2$ в одной магнитной подзоне приведена на рис.6 для значения магнитного потока $p/q = 3/2$, периода решетки $a = 80$ нм и амплитуды периодического потенциала (8) $V_1 =$

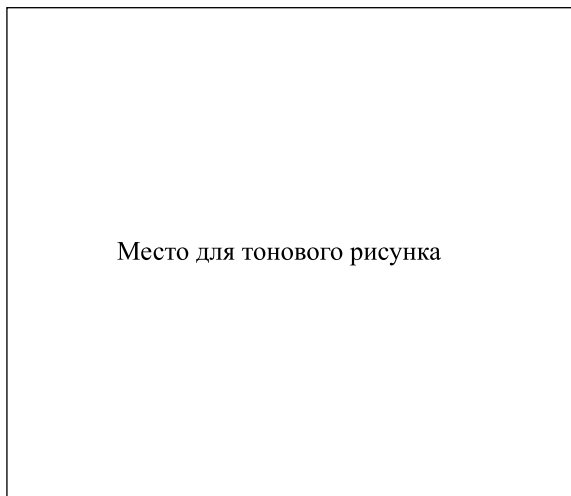


Рис.6. Типичное распределение особенностей компонент собственного вектора d_1 и d_2 в представлении d_1 при $p/q = 3/2$. Распределение для третьей компоненты не показано. Темные области соответствуют большим значениям модулей $d_{1,2}$, штриховкой отмечены области отрицательных значений

0.7 мэВ и $V_2 = 0$, что соответствует случаю неперекрывающихся дырочных магнитных подзон. Контур обхода $L_{1,2}$ вокруг особенностей показаны схематически.

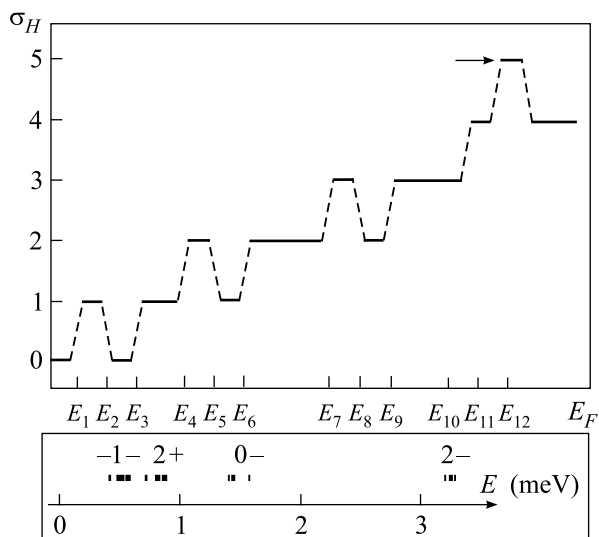


Рис.7. Значения холловского кондактанса σ_H (сплошные линии) при различных положениях уровня Ферми в областях между магнитными подзонами. Значения E_n схематически показывают положения центров подзон. Штрихованными линиями обозначены переходные области. Стрелка указывает область, где кондактанс отличается от соответствующего значения для электронов. На вставке показан спектр магнитных подзон и приведены индексы уровней Ландау

Кондактанс σ_H как функция от числа заполненных магнитных подзон (или положения уровня Ферми) приведен на рис.7 и рис.8, для случая неперекрывающихся и перекрывающихся магнитных

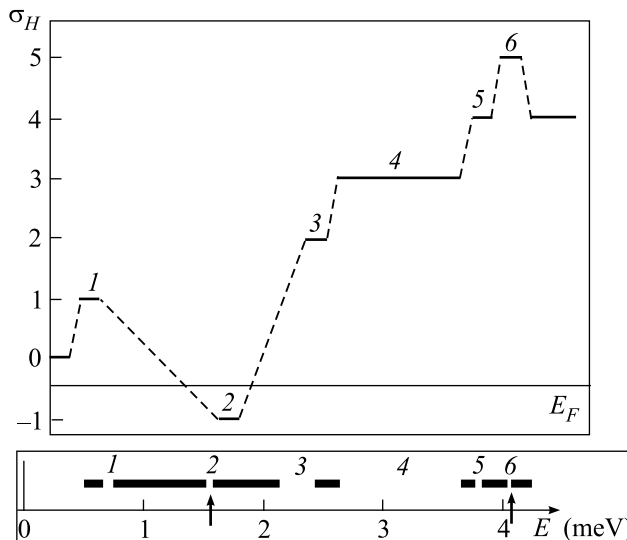


Рис.8. Квантованные значения σ_H при различных положениях уровня Ферми в областях между перекрытыми магнитными подзонами. Расчет проведен для тех же уровней Ландау, что и на рис.7, но для большей амплитуды периодического потенциала: $V_1 = 3$ мэВ. Цифрами отмечены энергетические щели. Стрелками обозначены области, где σ_H принимает экстремальные значения

подзон, соответственно. Когда амплитуда V_1 периодического потенциала не превосходит расстояния между соседними уровнями Ландау, перекрытия магнитных подзон нет (см. рис.7), и возможные отличия в квантовании σ_H от электронной задачи вызваны взаимодействием между дырочными уровнями Ландау, обусловленным недиагональными элементами гамильтониана Латтинжера [39]. Необходимо отметить, что при плавном увеличении концентрации дырок, сопровождающемся движением уровня Ферми через магнитную подзону (либо через группу перекрытых подзон), холловская проводимость плавно изменяется между соседними квантованными значениями, отмеченными на рис.7 и 8 жирными линиями. Плавное же изменение σ_H отмечено пунктирной линией. В этой области точное поведение кондактанса нам неизвестно.

При увеличении амплитуды периодического потенциала V_1 происходит перекрытие магнитных подзон, относящихся к различным уровням Ландау. Более того, может иметь место и касание подзон в некоторой точке магнитной зоны Бриллюэна. В момент

касания (вырождения в спектре) применение формулы (16) для расчета холловской проводимости исключается. Однако наши численные расчеты показали, что дальнейшее увеличение V_1 приводит к расталкиванию коснувшихся подзон и к снятию вырождения в спектре. Поэтому при больших V_1 использование формулы (16) вновь становится допустимым даже при условии $|V_1| > |\Delta E_{12}|$, то есть в системе перекрывающихся подзон. Пример такого спектра при $V_1 = 3$ мэВ показан в нижней части рис.8. Можно видеть, что увеличение амплитуды потенциала привело к снижению общего числа и максимальной ширины щелей в спектре по сравнению со спектром, показанным на рис.7. Для удобства на рис.8 мы занумеровали последовательно оставшиеся щели и соответствующие им холловские плато. Штриховыми линиями отмечены переходные области. Сравнение рис.7 и рис.8 показывает, что отличие в законе квантования неперекрывающихся и перекрытых подзон имеет место только для подзон с номером 4 и 8. Расчет показал, что при некоторой промежуточной амплитуде периодического потенциала, которая больше, чем на рис.7, но меньше, чем на рис.8, в этих подзонах наступает вырождение. В момент касания соседних подзон между ними происходит “обмен” классами Черна, что и объясняет смену закона квантования. Необычно высокое и необычно низкое (отрицательное) значения σ_H отмечены стрелками. При отрицательном σ_H направление холловского тока противоположно стандартному. Отметим, что появление отрицательных значений σ_H в некоторых щелях спектра предсказывалось ранее и для 2D электронного газа в периодическом потенциале [20, 21].

Автор благодарен А. А. Перову и Д. В. Хомицкому, совместно с которыми были выполнены работы, вошедшие в обзор, а также В. А. Гейлеру и З. Д. Квону за весьма полезные обсуждения. Настоящая работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты # 01-02-17102 и # 03-02-17054).

1. P. G. Harper, Proc. Phys. Soc. London, **A68**, 874 (1955).
2. M. Ya. Azbel, ZhETF **46**, 929 (1964) [Sov. Phys. JETP **19**, 634 (1964)].
3. F. H. Claro and J. H. Wannier, Phys. Rev. **B19**, 6068 (1979).
4. D. R. Hofstadter, Phys. Rev. **B14**, 2239 (1976).
5. J. Zak, Phys. Rev. **A136**, 776, 1647 (1964).
6. E. M. Lifshits and L. P. Pitaevsky, *Course of Theoretical Physics*, Vol. 5: *Statistical Physics*, (M.: Nauka, 1978; Pergamon, New York, 1980), Part 2.
7. R. E. Peierls, Z. Phys. **80**, 763 (1933).
8. B. A. Dubrovin and S. P. Novikov, ZhETF **79**, 1006 (1980) [Sov. Phys. JETP **52**, 511 (1980)]; S. P. Novikov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **257**, 538 (1981).
9. J. Avron, R. Seiler, and B. Simon, Phys. Rev. Lett. **51**, 51 (1983).
10. B. Simon, Phys. Rev. Lett. **51**, 2167 (1983).
11. M. V. Berry, Proc. R. Soc. London **A392**, 45 (1984).
12. M. Kohmoto, Ann. Phys. (N.Y.) **160**, 343 (1985).
13. M. Kohmoto, J. Phys. Soc. Jpn. **62**, 659 (1993).
14. M.-C. Chang and Q. Niu, Phys. Rev. **B53**, 7010 (1996).
15. J. Goryo and M. Kohmoto, Phys. Rev. **B66**, 085118 (2002).
16. H. Aoki and T. Ando, Phys. Rev. Lett. **57**, 3093 (1986).
17. Q. Niu, D. J. Thouless, and Y.-S. Wu, Phys. Rev. **B31**, 3372 (1985).
18. D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale et al., Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982).
19. P. Streda, J. Phys. **C15**, L717 (1982).
20. B. Huckestein and R. N. Bhatt, Surf. Sci. **305**, 438 (1997).
21. C. Albrecht, J. H. Smet, K. von Klitzing et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 147 (2001).
22. G. Montambaux and M. Kohmoto, Phys. Rev. **B41**, 11417 (1990).
23. M. Kohmoto, B. I. Halperin, and Y. Wu, Phys. Rev. **B45**, 13488 (1992).
24. M. Koshino, H. Aoki, K. Kuroki et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 1062 (2001).
25. B. A. Boyko, A. I. Bykov, M. I. Dolotenko et al., in: *Book of Abstracts of the VIII Intern. Conf. on Megagauss Magnetic Field*, Tallahassee, USA, 1999, p. 149.
26. D. Weiss, P. Grambow, K. von Klitzing et al., Appl. Phys. Lett. **58**, 2960 (1991).
27. J. Eroms, M. Zitzlsperger, D. Weiss et al., Phys. Rev. **B59**, R7829 (1999).
28. T. Schlösser, K. Ensslin, J. P. Kotthaus et al., Semicond. Sci. Technol. **11**, 1582 (1996).
29. M. G. Geisler, J. H. Smet, V. Umansky et al., *Conf. Workbook of the 15th Int. Conf. on Electronic properties of Two-Dimensional Systems*, 2003, Nara, Japan, 2003, p. 149.
30. V. Ya. Demikhovskii and A. A. Perov, JETP Lett. **76**, 620 (2002).
31. A. Lorke, S. Wimmer, B. Jager et al., Physica **B249-251**, 312 (1998).
32. Е. М. Баскин и др., Письма в ЖЭТФ **55**, 679 (1994).
33. N. A. Usov, ZhETF **94**, 305 (1988) [Sov. Phys. JETP **67**, 2565 (1988)].

34. D. A. Broido and L. J. Sham, *Phys. Rev.* **B31**, 888 (1985).
35. O. V. Volkov, V. E. Zhitomirskii, I. V. Kukushkin et al., *Phys. Rev.* **B56**, 7541 (1997).
36. M. Kubisa, L. Bryja, K. Ryczko et al., *Phys. Rev.* **B67**, 035305 (2003).
37. D. Weiss, *The 15th Int. Conf. on High Magnetic Fields in Semicond. Phys., Oxford, UK, 2002*, Book of Abstracts. The Institute of Physics, Portsmouth, 2002, p. 7.
38. V. Ya. Demikhovskii and D. V. Khomitsky, *Phys. Rev.* **B67**, 035321 (2003).
39. V. Ya. Demikhovskii and D. V. Khomitskiy, *Phys. Rev.* **B68**, 165301 (2003).