

О ТОНКОЙ СТРУКТУРЕ ТОРОИДАЛЬНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Л.М.Богомолов, Л.Е.Захаров

Показана применимость метода близкого равновесия для диссипативной плазмы. Получено достаточное условие, при выполнении которого равновесная тороидальная плазменная конфигурация должна иметь тонкую структуру из множества магнитных островков. Для токамака это условие выполнено в области $q(\rho) < 1$.

Согласно современным представлениям равновесные тороидальные плазменные конфигурации (токамаки, стеллараторы, стабилизированные пинчи) являются системами вложенных магнитных поверхностей сравнительно простой топологии. Появление же дополнительной структуры – магнитных островов – связывается либо с наличием резонансных возмущений в магнитной системе, либо с развитием неустойчивостей типа тириинг-мод. В данной работе будет сформулировано достаточное условие, при выполнении которого тороидальная конфигурация в силу одних только условий равновесия должна самопроизвольно перейти в новое близкое равновесное состояние, представляющее набор магнитных островков, и тогда традиционное представление о структуре конфигурации, на котором, в частности, основана теория переносов, перестает быть справедливым.

Для упрощения изложения рассмотрим условие появления близкого равновесия для прямолинейного шнура круглого сечения. Будем искать конфигурацию с винтовой симметрией, характеризуемой параметром $\kappa = n / m R$ (m, n – волновые числа, R – радиус эквивалентного тора). Уравнение равновесия для функции винтового потока Ψ^* , определяющей форму магнитных поверхностей, имеет вид¹:

$$\Delta^* \Psi^* = J(\rho, \Psi^*), \quad (1)$$

где Δ^* – аналог лапласиана для винтовой симметрии, а функциональная зависимость правой части $J(\rho, \Psi^*)$ от Ψ^* определяется распределением плотности тока $i(\rho, \Psi^*)$ и давления $p(\Psi^*)$ по магнитным поверхностям.

Пусть исходная конфигурация описывается функцией потока

$$\Psi^* = \Psi_0^*(\rho) = - \int_0^\rho (B_\omega - \kappa \rho B_s) d\rho, \quad (2)$$

где B_ω, B_s – компоненты магнитного поля, причем мы будем считать, что в точке $\rho = \rho_s$ находится резонансная поверхность, где $d\Psi_0^* / d\rho = 0$. Для линейного винтового возмущения $\Psi^* = \Psi_0^* + Y(\rho) \cos m\theta$ всюду вне бесконечно малой окрестности резонансной поверхности получаем уравнение:

$$\Delta^* Y(\rho) \cos m\theta = \frac{\partial J(\rho, \Psi^*)}{\partial \Psi^*} \Bigg|_{\Psi^* = \Psi_0^*} Y(\rho) \cos m\theta + J^1, \quad (3)$$

где $J^1 = J^1(\rho, \Psi^*)$ является добавкой, связанной с возможным возмущением зависимости тока и давления от Ψ^* .

Из-за наличия в (3) J^1 может показаться, что этого уравнения МГД равновесия недостаточно для рассмотрения возможности появления у исходной конфигурации эволюционно связанного близкого равновесия. Однако в линейном приближении $J^1(\rho, \Psi^*) = J^1(\rho, \Psi_0^*)$, а так как это несовместимо с угловой зависимостью остальных членов уравнения (3), то $J^1 = 0$. Вблизи же резонансной поверхности, которая расщепляется в магнитный островок,

естественным предположением является непрерывность тока и давления, которая в любом случае обеспечивается за времена меньшие, чем формирование самих профилей тока и давления.

В результате, для анализа появления близкого равновесия достаточно одного лишь уравнения равновесия. При этом независимо от закона Ома и явлений переноса, являющихся, как известно, аномальными, инвариантом перехода в близкое винтовое равновесие служит функциональная зависимость $J(\rho, \Psi^*)$.

При $J^1 = 0$ уравнение (3) эквивалентно известному в теории гидромагнитной устойчивости уравнению Эйлера для винтовых возмущений². В наиболее важном случае $B_s \gg B_\omega$ оно имеет вид

$$\frac{d}{d\rho} \rho \frac{dY}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho} Y = \frac{Y}{\mu - n/m} \left[\frac{4\pi R}{cB_s} j_s' + \frac{8\pi k^2 p'(\rho) R^2}{(\mu - n/m) B_s^2} \right], \quad (4)$$

где $\mu = RB_\omega / \rho B_s$ – вращательное преобразование. Для непрерывной плотности тока в области островка (4) должно решаться с условием сшивки внутреннего Y_i и внешнего Y_e решений и их производных на резонансной поверхности. Вблизи нее имеем разложение ($x = \rho - \rho_s$):

$$Y_{i,e} = \left| \frac{x}{\rho_s} \right|^v - \frac{4\pi}{c} \frac{j_s' x}{2\mu' \rho_s v} \left(\left| \frac{x}{\rho_s} \right|^v - \left| \frac{x}{\rho_s} \right|^{-v} \right) + \alpha_{i,e} \left| \frac{x}{\rho_s} \right|^{1-v}, \quad (5)$$

где

$$v = \frac{1}{2} \left[1 - (1 - 4D)^{1/2} \right], \quad D = -\frac{8\pi \rho_s p'}{B_s^2} \left(\frac{\mu}{\mu' \rho_s} \right)^2, \quad (6)$$

а $\alpha_{i,e}$ определяются граничными условиями, причем разность $\alpha_e - \alpha_i$ равна величине $\rho_s \Delta'$ для тириング-моды, которая также описывается уравнением (4), если в нем пренебречь слагаемым с давлением.

В (5) главным является первый член. Поэтому близкое равновесие в линейном приближении появляется при $D = 0$. Если $D < 0$, у системы нет такого нового равновесия, а при $D > 0$ конфигурация должна перестроиться с образованием магнитного островка. Получившую его w можно оценить из выражения (5) как $w/\rho_s = -2D/\rho_s \Delta'$, что подтверждается квазилинейным расчетом.

Аналог величины D в произвольной тороидальной конфигурации легко определить, если придать известному критерию Мерсье форму $1/4 - D > 0$, поделив в нем все слагаемые на квадрат ширины S . В частности, для токамака (круглого сечения) имеем

$$D = \frac{8\pi \rho_s p'}{B_s^2 S^2} (q^2 - 1), \quad q = 1/\mu, \quad (7)$$

так что в области шнура, где $q^2(\rho) < 1$ все магнитные поверхности должны быть расщеплены на магнитные островки. То же относится и к стабилизированным пинчам, для которых условие перехода в близкое равновесие ($D > 0$) всегда соблюдается.

Интересно отметить, что в случае неустойчивой тириинг-моды ($\Delta' > 0$), но при $D < 0$, что часто выполняется, например, для моды $m = 2$ в токамаках, шнур устойчив по отношению к малым возмущениям, но неустойчив к возмущениям с конечной амплитудой на резонансной поверхности $Y > \rho B_s \mu' (D / \rho_s \Delta')^2 / R$, что может объяснить наблюдаемый в срывах на токамаках неожиданный запуск винтового возмущения.

Независимость теории близкого равновесия от многих аномальных эффектов в тороидальных системах делает ее выводы применимыми для реальной плазмы. Проделанный здесь расчет для одной отдельно взятой моды показывает наличие при сформулированных выше условиях тонкой структуры у магнитной конфигурации, но он еще недостаточен для определения влияния этой структуры на процессы переноса. В дальнейшем предполагается учесть коллективный эффект многих мод.

Литература

1. Соловьев Л.С., Шафранов В.Д. Кн.: "Вопросы теории плазмы" под ред. М.А. Леоновича. Вып. 5, М.: Атомиздат, 1967, с. 58.
2. Кадомцев Б.Б. Там же. Вып. 2, 1963, с. 157.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
30 августа 1984 г.