Письма в ЖЭТФ, том 40, вып. 10, стр. 437 – 440 *25 ноября 1984 г.*

ОБОБЩЕННЫЕ СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ И СУПЕРГРАВИТАЦИЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ

М.А.Васильев

Предложен модифицированный закон эрмитового сопряжения, позволяющий построить эрмитово действие для супергравитации с положительной космологической постоянной Λ. Показано, что модифицированное сопряжение приводит к обобщенным ($Z_2 \times Z_2$ – градуированным) супералгебрам Ли, отвечающим супергравитации с $\Lambda > 0$.

В отличие от гравитации, в супергравитации [1] космологическая постоянная удовлетворяет ограничению [2-4] $\Lambda \leqslant 0$ (в суперсимметричных стационарных точках), что физически отвечает дополнительному космологическому притяжению. Этот факт связан с тем, что, при $\Lambda \neq 0$, суперсимметрия требует [2-4] введения массово-подобных членов для гравитино с массовым параметром, удовлетворяющим соотношению $\Lambda = -3m^2$. В результате, при $\Lambda > 0$, параметр m оказывается чисто мнимым, и массовый член гравитино

$$S^{3/2}_m = m\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma} \int d^4x \,(h_\nu{}^\alpha{}_{\dot\beta} h_\mu{}^{\gamma\dot\beta} \psi_{\rho\alpha}\psi_{\sigma\gamma} - h_{\nu\gamma}{}^{\dot\beta} h_\mu{}^{\gamma\dot\delta}\, \phi_{\rho\dot\beta}\,\phi_{\sigma\dot\delta}) \qquad (1)$$

($h_{\nu\alpha\dot\beta}$ – тетрада, $\psi_{\nu\alpha}$ и $\phi_{\nu\dot\beta}$ – сопряженные друг другу поля гравитино; $\nu, \mu, \rho \ldots = 0-3$; $\alpha, \beta \ldots = 1,2$; $\dot\alpha, \dot\beta \ldots = 1,2$) становится антиэрмитовым при стандартном сопряжении $\psi^+_{\rho\alpha} = \phi_{\rho\dot\alpha}$, $\phi^+_{\rho\dot\alpha} = \psi_{\rho\alpha}$, $h^+_{\nu\alpha\dot\beta} = h_{\nu\beta\dot\alpha}$.

Со многих точек зрения интерес представляет однако противоположный (де ситтеровский) случай $\Lambda > 0$, физически отвечающий дополнительному отталкиванию. В связи с этим мы хотели бы заметить, что, если модифицировать закон сопряжения следующим образом

$$\psi^*_{\rho\alpha} = i\phi_{\rho\dot\alpha}, \quad \phi^*_{\rho\dot\beta} = -i\,\psi_{\rho\beta}, \quad h^*_{\nu\alpha\dot\beta} = h_{\nu\beta\dot\alpha}, \qquad (2)$$

то, как массовый член (1), так и все действие $N=1$ супергравитации [1,4] оказываются самосопряженными именно при $\Lambda > 0$ (случай $N > 1$ может быть рассмотрен совершенно аналогично). Хотя мы предполагаем, что операция $*$ (2) антилинейна ($i^* = -i$) и изменяет порядок операторов на обратный, она не может рассматриваться как эрмитово сопряжение, поскольку, как легко видеть

$$(F^*)^* = -F, \quad (B^*)^* = B, \qquad (3)$$

где F и B произвольные фермионные и бозонные поля. Тем не менее, используя оператор Клейна $K = e^{i\pi n_F}$ (n_F – оператор фермионного числа частиц), обладающий свойствами

$$KB = BK, \quad KF = -FK, \quad K^2 = 1, \quad K = K^+, \qquad (4)$$

всякой операции типа (3) можно сопоставить эрмитово сопряжения (инволюцию) +, положив

$$F^{+} = i\ KF^{*}, \quad B^{+} = B^{*}. \tag{5}$$

В результате, поскольку на бозонах $B^{+} = B^{*}$, действие $N=1$ супергравитации с $\Lambda > 0$ оказывается эрмитовым, если

$$\psi^{+}_{\rho\alpha} = -K\phi_{\rho\dot\alpha}, \quad \phi^{+}_{\rho\dot\alpha} = K\psi_{\rho\alpha}, \quad (h_{\nu\alpha\dot\beta})^{+} = h_{\nu\beta\dot\alpha}. \tag{6}$$

К сожалению, хотя предложенный закон сопряжения и обеспечивает эрмитовость действия супергравитации с $\Lambda > 0$, практически, его удается реализовать только в пространстве состояний с индефинитной метрикой в фермионном секторе (а при $N > 1$ и в секторе полей спина 1, имеющих неверный знак кинетического члена), что затрудняет физическую интерпретацию теории. Тем не менее, поскольку действие супергравитации с $\Lambda > 0$ остается инвариантным относительно локальных суперпреобразований с параметрами ϵ_α и $\xi_{\dot\alpha}$, удовлетворяющими условиям эрмитовости типа (6), значительный интерес представляет вопрос о соответствующей алгебре суперсимметрии. Довольно неожиданно, решение этого вопроса, описываемое ниже, выводит за рамки обычных супералгебр Ли.

Супералгебра Ли osp $(N, 4; \mathbb{C})$, отвечающая комплексификации расширенной анти-де ситтеровской супералгебры osp $(N, 4; \mathbb{R})$, может быть задана генераторами $L_{\alpha\beta}$, $N_{\dot\alpha\dot\beta}$, $\mathcal{P}_{\alpha\dot\beta}$, T^{ij}, Q^{i}_{α}, $R^{j}_{\dot\beta}$ $(i, j \ldots = 1 \ldots N)$ с законом произведения

$$[\mathcal{P}_{\alpha\dot\beta}, \mathcal{P}_{\gamma\dot\delta}] = 2\lambda^2 (\epsilon_{\alpha\gamma} N_{\dot\beta\dot\delta} + \epsilon_{\dot\beta\dot\delta} L_{\alpha\gamma}); \tag{7}$$

$$[\mathcal{P}_{\alpha\dot\beta}, Q^{i}_{\gamma}] = \lambda\epsilon_{\alpha\gamma} R^{i}_{\dot\beta}, \qquad [\mathcal{P}_{\alpha\dot\beta}, R^{i}_{\dot\delta}] = \lambda\epsilon_{\dot\beta\dot\delta} Q^{i}_{\alpha}; \tag{8}$$

$$\{Q^{i}_{\alpha}, Q^{j}_{\beta}\} = \lambda (2\delta^{ij} L_{\alpha\beta} + \epsilon_{\alpha\beta} T^{ij}), \quad \{R^{i}_{\dot\alpha}, R^{j}_{\dot\beta}\} = \lambda (2\delta^{ij} N_{\dot\alpha\dot\beta} + \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} T^{ij}); \tag{9}$$

$$\{Q^{i}_{\alpha}, R^{j}_{\dot\beta}\} = \delta^{ij} \mathcal{P}_{\alpha\dot\beta}. \tag{10}$$

К формулам (7) – (10) надо также добавить соотношения, выражающие (комплексную) лоренцеву и $o(N)$ ковариантность генераторов, например,

$$[L_{\alpha\beta}, \mathcal{P}_{\gamma\dot\delta}] = \frac{1}{2} (\epsilon_{\alpha\gamma} \mathcal{P}_{\beta\dot\delta} + \epsilon_{\beta\gamma} \mathcal{P}_{\alpha\dot\delta}), \quad [T^{ij}, Q^{k}_{\alpha}] = \delta^{jk} Q^{i}_{\alpha} - \delta^{ik} Q^{j}_{\alpha}. \tag{11}$$

В этой алгебре можно ввести инволюцию (эрмитово сопряжение)

$$L^{+}_{\alpha\beta} = -N_{\dot\alpha\dot\beta}, \; N^{+}_{\dot\alpha\dot\beta} = -L_{\alpha\beta}, \mathcal{P}^{+}_{\alpha\dot\beta} = -\mathcal{P}_{\beta\dot\alpha}, (T^{ij})^{+} = -T^{ij}, \quad (Q^{i}_{\alpha})^{+} = iR^{i}_{\dot\alpha}, \quad (R^{i}_{\dot\beta})^{+} = iQ^{i}_{\beta}, \tag{12}$$

в точности отвечающую выделению ее вещественной формы osp $(N, 4; \mathbb{R})$. Однако, у osp $(N, 4, \mathbb{C})$ существует также антиавтоморфизм*

$$L^{*}_{\alpha\beta} = -N_{\dot\alpha\dot\beta}, \; N^{*}_{\dot\alpha\dot\beta} = -L_{\alpha\beta}, \mathcal{P}^{*}_{\alpha\dot\beta} = \mathcal{P}_{\beta\dot\alpha}, \quad (T^{ij})^{*} = -T^{ij}, \quad (Q^{i}_{\alpha})^{*} = iR^{i}_{\dot\alpha}, \quad (R^{i}_{\dot\beta})^{*} = -iQ^{i}_{\beta}, \tag{13}$$

обладающий свойствами (3), где $B = (L, N, \mathcal{P}, T)$, $F = (Q, R)$. Рассматривая произвольное представление osp $(N, 4, \mathbb{C})$, операции* (13) можно сопоставить эрмитово сопряжение + (5) с $K = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} \end{pmatrix}$. В рамках osp $(N, 4, \mathbb{C})$ этому сопряжению не отвечает никакая инволюция, поскольку операторы KQ и KR ей не принадлежат.

Центральный пункт состоит однако в том, что, если от операторов $L, N, \mathcal{P}, T, Q, R$ перейти к операторам $l_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta}$, $n_{\dot\alpha\dot\beta} = N_{\dot\alpha\dot\beta}$, $t^{ij} = T^{ij}$, $P_{\alpha\dot\beta} = K\mathcal{P}_{\alpha\dot\beta}$, $q^{i}_{\alpha} = Q^{i}_{\alpha}$, $r^{i}_{\dot\beta} = KR^{i}_{\dot\beta}$, то, во-первых, эти операторы образуют замкнутую алгебру

$$[P_{\alpha\dot\beta}, P_{\gamma\dot\delta}] = 2\lambda^2 (\epsilon_{\alpha\gamma} n_{\dot\beta\dot\delta} + \epsilon_{\dot\beta\dot\delta} l_{\alpha\gamma}); \tag{14}$$

$$\{P_{\alpha\dot\beta}, q^i_\gamma\} = \lambda \epsilon_{\alpha\gamma} r^i_{\dot\beta}, \quad \{P_{\alpha\dot\beta}, r^i_{\dot\delta}\} = \lambda \epsilon_{\dot\beta\dot\delta} q^i_\alpha, \tag{15}$$

$$\{q^i_\alpha, q^j_\beta\} = \lambda (2\delta^{ij} l_{\alpha\beta} + \epsilon_{\alpha\beta} t^{ij}), \quad \{r^i_{\dot\alpha}, r^j_{\dot\beta}\} = -\lambda (2\delta^{ij} n_{\dot\alpha\dot\beta} + \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} t^{ij}); \tag{16}$$

$$[q^i_\alpha, r^j_{\dot\beta}] = -\delta^{ij} P_{\alpha\dot\beta}, \tag{17}$$

(соотношения, содержащие l, n и t аналогичны соотношениям (11)) и, во-вторых, из (5) и (13) вытекает, что

$$l^+_{\alpha\beta} = -n_{\dot\alpha\dot\beta}, \; n^+_{\dot\alpha\dot\beta} = -l_{\alpha\beta}, \; P^+_{\alpha\dot\beta} = P_{\beta\dot\alpha}, \; (t^{ij})^+ = -t^{ij}, \; q^{+i}_\alpha = -r^i_{\dot\alpha}, \; r^{+i}_{\dot\alpha} = -q^i_\alpha, \tag{18}$$

причем, как легко убедиться, операция + (18) задает инволюцию алгебры (14) – (17), в дальнейшем обозначаемой как $\widetilde{\mathrm{osp}}(N, 4; \mathbb{C})$.

Чрезвычайно интересно, что построенная на основе супералгебры Ли osp $(N, 4; \mathbb{C})$, алгебра $\widetilde{\mathrm{osp}}(N, 4; \mathbb{C})$ не является обычнои супералгеброй Ли (ср. (15), (17)). Фактически $\widetilde{\mathrm{osp}}(N,4;\mathbb{C})$ представляет собой частный случай рассматривавшихся например в [5] обобщенных $\underbrace{Z_2 \otimes \ldots \otimes Z_2}_{n}$ – градуированных алгебр, определяемых соотношениями

$$[g_1, g_2\} = -(-1)^{\sum_{A=1}^{n} \pi_A(g_1)\,\pi_A(g_2)} [g_2, g_1\}, \tag{19}$$

$$(-1)^{\sum_{A=1}^{n} \pi_A(g_1)\,\pi_A(g_3)} [g_1, [g_2, g_3\}\} + (1 \to 2 \to 3 \to 1) + (1 \to 3 \to 2 \to 1) = 0, \tag{20}$$

где $\pi_A(g)$ $(A = 1 \ldots n)$ – n четностей элемента g, каждая из которых принимает значение 0,1. Действительно, легко проверить, что $\widetilde{\mathrm{osp}}(N, 4; \mathbb{C})$ удовлетворяет соотношениям (19), (20) с двумя четностями $\pi_1(g)$ и $\pi_2(g)$, совпадающими с обычными четностями числа спинорных индексов с точкой и без точки у генератора g.

Для того, чтобы убедиться, что порождаемая соотношениями (14) – (18) алгебра $\widetilde{\mathrm{osp}}(N, 4; R)$ отвечает супергравитации с $\Lambda > 0$, достаточно заметить, что переход от эрмитового $P_{\alpha\dot\beta}$ (18) к антиэрмитовому $\hat{P}_{\alpha\dot\beta} = iP_{\alpha\dot\beta}$ приводит к изменению знака λ^2 в (14) и что $\lambda^2 \sim -\Lambda$, как это следует например из подхода к супергравитации, предложенного в [6-8]. Подчеркнем, что этот подход может применяться непосредственно к $\widetilde{\mathrm{osp}}(N, 4; \mathbb{R})$ что приведет к супергравитации с $\Lambda > 0$, обсуждавшейся выше, в которой вместо полей h, ψ и ϕ будут использоваться поля iKh, ψ, $K\phi$. Следует однако иметь в виду, что алгебра $\widetilde{\mathrm{osp}}(N, 4; \mathbb{R})$ по-прежнему является расширением анти-де ситтеровской алгебры Ли o (3,2), а изменение знака Λ происходит из-за необычной связи сопряжения и инволюции в $\widetilde{\mathrm{osp}}(N, 4; \mathbb{C})$, приводящей к эрмитовости $P_{\alpha\dot\beta}$.

В заключение, заметим, что результаты работы указывают на, как нам кажется, новую интересную возможность связанную с построением суперсимметричных теорий, опирающихся на обобщенные супералгебры Ли.

Автору приятно выразить свою благодарность И.А.Баталину, Б.Л.Воронову, Д.А.Киржницу, А.Д.Линде, О.В.Огиевецкому, И.В.Тютину, Е.С.Фрадкину и А.А.Цейтлину за полезные обсуждения.

Добавление. После того, как работа была подготовлена к печати, нам стало известно, что в недавних публикациях [9,10] также рассматривались теории супергравитации с $\Lambda > 0$ (автор благодарен Р.Э.Каллош и А.А.Цейтлину, обратившим его внимание на эти работы). В связи с этим подчеркнем, что метод, предложенный в настоящей работе и опирающийся на модифицированный **закон сопряжения*** и обобщенные супералгебры Ли, существенно отличается от метода, использовавшегося в [9,10], который опирается на обычное сопряжение и обычные супералгебры Ли (что не спасает однако от трудностей, связанных с индефинитной метрикой). Наиболее ярко это отличие проявляется в возможности построения теорий супергравитации с $\Lambda > 0$, отвечающих N – расширенной анти-де ситтеровской супергравитации при любых $1 \leqslant N \leqslant 8$, а не только при четных N, как в [9,10].

Литература

1. *Van Nieuwenhuizen P.* Phys. Rep., 1981, **68**, 189.
2. *Freedman D.Z., Das A.* Nucl. Phys., 1977, **B120**, 221.
3. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.* Lebedev Physical Institute Preprint, 1976, No 197.
4. *Townsend P.K.* Phys. Rev., 1977, **D15**, 2808.
5. *Rittenberg V., Wyler D.* Nucl. Phys., 1978, **B139**, 189; J. Math. Phys., 1978, **19**, 2193.
6. *MacDowell S.W., Mansouri F.* Phys. Rev. Lett., 1977, **38**, 739.
7. *Townsend P.K., Van Nieuwenhuizen P.* Phys. Lett., 1977, **67B**, 439.
8. *Mansouri F.* Phys. Rev., 1977, **D16**, 2456.
9. *Lukierski J., Nowicki A.* Institute of Theoretical Physics, University of Wroclaw, Preprint, 1984, No 609.
10. *Pilch K., Van Nieuwenhuizen P., Sohnius M.F.* Preprint ITP-SB-84-46.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4 октября 1984 г.