Письма в ЖЭТФ, том 85, вып. 8, с. 498 – 500 © 2007 г. 25 апреля

Оптические эффекты во вращающейся системе отсчета

М. М. Денисов, Н. В. Кравцов[+], И. В. Кривченков

Московский авиационный технологический институт – РГТУ им. К.Э. Циолковского, 121552 Москва, Россия

[+]Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, 119899 Москва, Россия

Поступила в редакцию 23 января 2007 г.

После переработки 15 марта 2007 г.

Исследованы закономерности распространения световых волн во вращающейся системе отсчета. Показано, что в неинерциальной системе отсчета возможно искривление лучей света, которое может быть зарегистрировано при использовании современной лазерной техники.

PACS: 04.20.–q

При проведении различных оптических измерений на поверхности Земли световые лучи обычно считают прямыми линиями. Однако система отсчета, находящаяся на поверхности Земли, из-за ее вращения вокруг оси является слабонеинерциальной системой отсчета. Это приводит к существованию в земных лабораториях ряда оптических эффектов. Одним из наиболее известных является эффект Саньяка – появление в кольцевом резонаторе, находящемся во вращающейся системе отсчета, разности фаз встречных волн, что, в свою очередь, приводит к возникновению в кольцевом лазере разности частот генерации встречных электромагнитных волн. По терминологии Эйнштейна [1], поля инерции неинерциальных систем отсчета являются гравитационными полями частного вида. Поэтому следует ожидать, что при проведении оптических измерений в неинерциальных системах отсчета в той или иной мере будут проявляться и другие эффекты общей теории относительности: искривление лучей света и смещение частоты лазерного излучения.

Проведем расчет движения световых волн во вращающейся системе отсчета и покажем, что в настоящее время имеется возможность наблюдать на эксперименте некоторые из этих оптических эффектов.

Рассмотрим декартову систему координат, жестко связанную с Землей. Начало отсчета поместим в центр Земли, ось z направим вдоль вектора ее угловой скорости $\mathbf{\Omega}$, а ось x поместим в плоскость нулевого (гринвичского) меридиана. Так как угол искривления лучей в гравитационном поле Земли ($\delta\varphi = 2r_g/b \sim 10^{-9}$ рад $= 2\cdot 10^{-4}$ угловой секунды) очень мал, влиянием гравитации на движение электромагнитных импульсов будем пренебрегать. Тогда отличные от нуля компоненты метрического тензора g_{ik} в этой системе отсчета будут иметь вид [2]

$$g_{00} = 1 - \frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}, \quad g_{01} = \frac{\Omega y}{c}, \qquad g_{02} = -\frac{\Omega x}{c}, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1. \tag{1}$$

Рассмотрим в пространстве-времени с метрическим тензором (1) распространение электромагнитных волн. Если не интересоваться амплитудой электромагнитных волн, то в приближении геометрической оптики уравнения для лучей и законы распространения электромагнитных сигналов вдоль лучей можно изучать, используя уравнения для изотропных геодезических [2] волн:

$$dK^i/d\sigma + \Gamma^i_{nm}K^nK^m = 0, \tag{2}$$

где σ – некоторый аффинный параметр, $K^i = dx^i/d\sigma$ – четырехвектор, касательный к изотропной геодезической, удовлетворяющий соотношению

$$g_{nm}K^nK^m = 0. \tag{3}$$

Однако для наших целей удобнее в уравнениях (2) перейти от дифференцирования по афинному параметру σ к дифференцированию по координате $x^0 = ct$ в соответствии с равенствами: $d/d\sigma = K^0 d/dx^0$, $K^i = K^0 dx^i/dx^0$. В результате уравнения (2) примут вид

$$\frac{d^2x^\alpha}{(dx^0)^2} + \left\{\Gamma^\alpha_{nm} - \Gamma^0_{nm}\frac{dx^\alpha}{dx^0}\right\}\frac{dx^n}{dx^0}\frac{dx^m}{dx^0} = 0.$$

Подставляя в эти уравнения символы Кристоффеля, вычисленные с использованием компонент (1) метрического тензора g_{ik}, получим:

$$\ddot{x} - \frac{\Omega^2}{c^2}x - \frac{2\Omega}{c}\dot{y} = 0, \quad \ddot{y} - \frac{\Omega^2}{c^2}y + \frac{2\Omega}{c}\dot{x} = 0, \quad \ddot{z} = 0, \tag{4}$$

где точка обозначает производную по x^0.

В качестве одного из начальных условий для этих уравнений потребуем, чтобы в момент времени $t = 0$ электромагнитный импульс находился в точке $x = x_s$, $y = y_s$, $z = z_s$. Тогда решение уравнений (4) принимает вид

$$x = [x_s + ctn_x] \cos \Omega t + [y_s + ctn_y] \sin \Omega t, \qquad (5)$$

$$y = [y_s + ctn_y] \cos \Omega t - [x_s + ctn_x] \sin \Omega t, \quad z = z_s + ctn_z,$$

где константы интегрирования n_x, n_y и n_z в силу первого интеграла (3) системы уравнений (2) должны удовлетворять условию

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \qquad (6)$$

Уравнения (5) при различных ориентациях вектора $\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ задают в параметрическом виде семейство лучей, выходящих из точки $\mathbf{r}_s = \{x_s, y_s, z_s\}$. Переменную t, входящую в соотношения (5), можно рассматривать двояко. С одной стороны, эта переменная может играть роль времени, в терминах которого уравнения (5) описывают движение электромагнитного импульса во вращающейся системе отсчета, находившегося при $t = 0$ в точке $\mathbf{r}_s$. С другой стороны, t – это параметр, имеющий размерность времени и позволяющий трактовать выражения (5) как уравнения для всевозможных лучей, проходящих через точку $\mathbf{r}_s$, или как параметрическое задание пространственных кривых, по которым распространяются электромагнитные импульсы.

Выберем из этого семейства луч, проходящий через некоторую заданную точку $\mathbf{r}_f = \{x_f, y_f, z_f\}$. Компоненты вектора $\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ для этого луча должны иметь вид

$$n_x = \frac{x_f \cos \Omega t_f - y_f \sin \Omega t_f - x_s}{ct_f}, \qquad (7)$$

$$n_y = \frac{y_f \cos \Omega t_f + x_f \sin \Omega t_f - y_s}{ct_f}, \quad n_z = \frac{z_f - z_s}{ct_f},$$

где t_f – момент времени, в который электромагнитный импульс достигнет точки $\mathbf{r}_f$.

Так как вектор $\mathbf{n}$ должен удовлетворять условию (6), то из соотношений (7) получаем уравнение для нахождения t_f :

$$c^2 t_f^2 = (x_f - x_s)^2 + (y_f - y_s)^2 + (z_f - z_s)^2 + \qquad (8)$$

$$+2[x_s x_f + y_s y_f][1 - \cos \Omega t_f] + 2[x_s y_f - y_s x_f] \sin \Omega t_f.$$

Используя полученные выражения, рассмотрим эффекты, вызываемые вращением системы отсчета. Первый эффект – это распространение электромагнитных импульсов из некоторой точки $\mathbf{r}_1$ в точку $\mathbf{r}_2$ по одному лучу, а обратно – по другому лучу. Рассмотрим две произвольные точки трехмерного пространства. Не ограничивая общности, предположим, что эти точки имеют координаты: $\mathbf{r}_1 = \{x_1, 0, z_1\}$ и $\mathbf{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$. Предположим, что достаточно узкий лазерный луч, начинающийся в точке $\mathbf{r}_1$, где находится лазерная станция, попадает в точку $\mathbf{r}_2$. Назовем его основным лучом. Для нахождения этого луча в формулах (5)–(8) необходимо положить: $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_2$.

Наблюдатель, находящийся в точке $\mathbf{r}_1$, будет считать, что электромагнитные импульсы основного луча распространяются в направлении, определяемом касательным вектором $\mathbf{N}$ к лучу в этой точке, имеющем проекции:

$$N_x = \dot{x}(0) = \frac{x_2 \cos \Omega t_+ - y_2 \sin \Omega t_+ - x_1}{ct_+},$$

$$N_y = \dot{y}(0) = \frac{y_2 \cos \Omega t_+ + x_2 \sin \Omega t_+}{ct_+} - \frac{\Omega x_1}{c},$$

$$N_z = \dot{z}(0) = \frac{z_2 - z_1}{ct_+},$$

где время t_+ удовлетворяет уравнению

$$c^2 t_+^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_1 x_2 \cos \Omega t_+ + \\ +2x_1 y_2 \sin \Omega t_+ + (z_2 - z_1)^2.$$

Пусть в точке $\mathbf{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$ находится отражатель электромагнитного излучения с широкой диаграммой направленности. Тогда один из отраженных в точке $\mathbf{r}_2$ лучей попадет в точку $\mathbf{r}_1$, где находится лазерная станция. Назовем его обратным лучом. Для этого луча $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_2$, а $\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_1$.

Наблюдатель, находящийся в точке $\mathbf{r}_1$, будет считать, что электромагнитные импульсы обратного луча прибывают в точку $\mathbf{r}_1$ по касательной линии к лучу в точке наблюдения. Это направление будет определяться касательным вектором $\mathbf{M}$ с проекциями:

$$M_x = \dot{x}(ct_-) = \frac{x_1 - x_2 \cos \Omega t_- - y_2 \sin \Omega t_-}{ct_-},$$

$$M_y = \dot{y}(ct_-) = \frac{x_2 \sin \Omega t_- - y_2 \cos \Omega t_-}{ct_-} - \frac{\Omega x_1}{c},$$

$$M_z = \dot{z}(ct_-) = -\frac{z_2 - z_1}{ct_-},$$

где время t_- можно найти из уравнения

$$c^2 t_-^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_1 x_2 \cos \Omega t_- - \\ -2x_1 y_2 \sin \Omega t_- + (z_2 - z_1)^2.$$

Несложно убедиться, что векторы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{M}$ не являются коллинеарными. Угол между этими векторами равен

$$\delta\varphi = \frac{2\Omega}{c}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + y_2^2}. \qquad (9)$$

Так как подкоренное выражение не зависит от z_1 и z_2, то оно представляет собой квадрат расстояния между проекциями точек $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения системы отсчета.

Второй эффект – линейное смещение обратного луча. Предположим, что достаточно узкий основной лазерный луч, начинающийся в точке $\mathbf{r}_1 = \{x_1, 0, z_1\}$, попадает в точку $\mathbf{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$. Наблюдатель, находящийся в точке $\mathbf{r}_2$, с помощью уголкового отражателя (ретрорефлектора) типа устройства "кошачий глаз" направляет узкий обратный лазерный луч по касательной к прямому лучу в точке $\mathbf{r}_2$. Из формул (5)–(8) следует, что этот луч в общем случае не попадет в точку $\mathbf{r}_1$, а будет проходить на некотором расстоянии δR от нее:

$$\delta R = \frac{2\Omega R_0}{c^2}\sqrt{[(x_1 - x_2)^2 + y_2^2]}, \qquad (10)$$

где $R_0^2 = (x_1 - x_2)^2 + y_2^2 + (z_2 - z_1)^2$.

Линейное смещение обратного луча относительно прямого луча происходит в сторону вращения системы отсчета.

Из выражений (9) и (10) следует, что рассмотренные эффекты наиболее ярко проявляются, когда обе точки расположены в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Сделаем некоторые оценки. Предположим, что точки $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ расположены на экваторе Земли и расстояние между ними равно 100 км. Подставляя в выражения (9) и (10) это значение и учитывая, что угловая скорость вращения Земли $\Omega = 7.3 \cdot 10^{-5}$ рад/с, получим: $\delta\varphi = 5 \cdot 10^{-8}$ рад $= 10^{-2}$ угл.с; $\delta R = 0.5$ см.

Отсюда следует, что на расстояниях порядка 100 км рассмотренные эффекты очень малы. Однако эти эффекты достигают вполне измеримых значений, если отражатель электромагнитного излучения установить на геостационарном спутнике. Как известно, геостационарными спутниками являются космические аппараты, обращающиеся вокруг Земли с запада на восток по круговым экваториальным орбитам радиуса $R_G = 42300$ км с угловой частотой, совпадающей с угловой скоростью вращения Земли. Так как геостационарный спутник занимает фиксированное положение относительно выбранного участка Земли, то его можно считать частью вращающейся системы отсчета, начало которой помещено в центр Земли.

Подставляя в выражение (9) $x_1 = R_\oplus = 6300$ км, $x_2 = R_G = 42300$ км, $y_2 = z_1 = z_2 = 0$, получим: $\delta\varphi = 1.75 \cdot 10^{-5}$ рад= 3.5 угл.с. Так как современные лазерные станции типа "Майданак" способны [3] измерять углы с точностью от 0.5 до 1.2 угл.с, то этот эффект общей теории относительности в настоящее время можно проверить на эксперименте.

Из выражения (10) при этих же значениях входящих в него величин следует, что $\delta R = 0.6$ км. Таким образом, центр отраженного от ретрорефлектора лазерного пучка будет находиться на приличном расстоянии от лазерной станции. Поэтому при лазерной локации удаленных объектов влияние вращения Земли на световые лучи должно учитываться. Если ретрорефлектор имеет достаточно узкую диаграмму направленности отраженного излучения, то телескоп лазерной станции может не попасть в отраженный пучок лучей. Однако современные ретрорефлекторы имеют [4] широкие диаграммы направленности отраженного излучения: порядка 4 угл.с по уровню половинной мощности. В этом случае приемный телескоп лазерной станции попадет на периферию пятна, образуемого отраженным импульсом на поверхности Земли. Измеряя расстояние между центром этого пятна и телескопом лазерной станции, можно проверить предсказание теории относительно величины δR.

Следует однако отметить, что при проведении лазерной локации космических аппаратов необходимо учитывать и другие эффекты общей теории относительности. В частности, как показано в работе [4], при использовании на космическом аппарате ретрорефлекторов, заполненных кварцевым стеклом, на диаграмму направленности отраженного излучения оказывает влияние и эффект Физо.

Настоящая работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант # 07-02-00458.

1. А. Эйнштейн, *Собрание научных трудов*, М.: Наука, 1965.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, М.: Наука, 1988.
3. *Глонасс – принципы построения и функционирования*, 3-е издание под ред. А. И. Петрова и В. Н. Харисова, М.: Радиотехника, 2005.
4. В. П. Васильев, В. А. Гришмановский, Л. Ф. Плиев и др., Письма в ЖЭТФ **55**, 317 (1992).