*Письма в ЖЭТФ, том 45, вып. 1, стр. 3 – 5* *10 января 1987 г.*

# ТОПОЛОГИЧЕСКИ НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ПЕТЛЕВЫЕ МОНОПОЛИ

*И.А.Овидько*

Петлевые монополи – новый тип топологических возбуждений в калибровочных теориях – исследуются методами алгебраической топологии. Показано, что каждый петлевой монополь с непрерывным ядром является сочетанием обычного (шароподобного) монополя и нитеподобной конфигурации калибровочного поля.

В калибровочных теориях Янга – Миллса – Хиггса (ЯМХ) представляет большой интерес анализ топологически нетривиальных конфигураций калибровочных полей – топологических возбуждений. До настоящего времени изучались только возбуждения сравнительно простой геометрии: монополи (шароподобные конфигурации) [1], нитеподобные конфигурации [1], нити, оканчивающиеся на монополях [2], нити, содержащие в своих ядрах монополи [3]. Априори нет запрета на возможность существования в природе и других типов топологических возбуждений, что инициирует интерес к их анализу. В настоящей работе исследуется устойчивость и классификация возбуждений петлевой формы, которые мы назовем петлевыми монополями.

Рассмотрим стационарную теорию ЯМХ, в которой калибровочная группа $G$ нарушается с помощью механизма Хиггса до группы $H$ ($G$, $H$ – группы Ли, $H \subset G$). Ядро петлевого монополя в такой теории есть бубликообразная область $L$ (рис. 1), внутри которой реализуется локальная (калибровочная) $G$-симметрия, в то время как за пределами бублика реализуется только локальная $H$-симметрия. Исследуем классификацию петлевых монополей и их (топологическую) устойчивость.

В рамках формализма расслоенных пространств – геометрического аналога калибровочных теорий [1] – петлевые монополи находятся во взаимно однозначном соответствии с такими главными $G$-расслоениями $\xi$ над базой $R^3$ ($R^3$ – 3-мерное евклидово пространство), которые над областью $R^3 \setminus L$ редуцируются к $H$-расслоениям. Поэтому для нахождения классификации петлевых монополей достаточно вычислить множество классов эквивалентности расслоений $\xi$. Последняя задача сводится к задаче гомотопической классификации отображений $L \to B_G$ и $R^3 \setminus L \to B_H$ (здесь $B_G$ – база универсального $G$-расслоения, $B_H$ – база универсального $H$-расслоения), непрерывно продолжаемых друг на друга [4]. Решая вышеуказанную задачу с помощью средств теории препятствий [5, 6], получим, что петлевые монополи классифицируются наборами $(\alpha, \beta)$ – элементами группы

$$\Gamma^0(G, H) = \pi_1(G, H) \times \pi_2(G, H) \qquad (1)$$

(здесь $\pi_r(G, H)$ – относительная гомотопическая группа), где $\alpha \in \pi_1(G, H)$, $\beta \in \pi_2(G, H)$. Пример: $G = SO(3)$, $H = U(1)$

$$\Gamma^0(SO(3), U(1)) = Z_2 \times Z \tag{2}$$

Здесь $\alpha \in Z_2$, $\beta \in Z$.

Согласно (1) каждый петлевой монополь представляет собой сочетание шарового монополя и нитеподобной конфигурации. Свойства нити, присущие петлевому монополю, характеризуются субзарядом $\alpha$, а свойства шарового монополя – субзарядом $\beta$. Похожий результат имеет место для петлевых дефектов в конденсированных средах [6]. Устойчивость петлевого монополя по-разному зависит от топологических субзарядов $\alpha$ и $\beta$: (а) Если $\alpha$ – тривиален ($\alpha = 0$), $\beta$ – нетривиален, то с помощью непрерывной трансформации напряженности калибровочного поля петлевой монополь можно "порвать", после чего он превращается в шаровой монополь (характеризуемый только $\beta$). (б) $\alpha$ – нетривиален, $\beta = 0$. Петлевой монополь представляет собой просто нить, свернутую в кольцо. Конфигурацию "порвать" нельзя, однако, уменьшая радиус петли монополя (стягивая его), можно полностью его устранить. (в) $\alpha$, $\beta$ – нетривиальны. "Порвать" петлевой монополь нельзя, однако, уменьшая радиус петли монополя, можно превратить его в шаровой монополь.

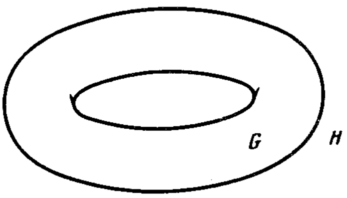


Рис. 1

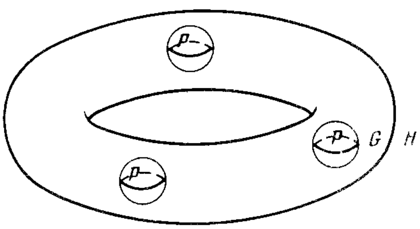


Рис. 2

Рис. 1. Петлевой монополь. В ядре монополя реализуется локальная $G$-симметрия, вне ядра – локальная $H$-симметрия

Рис. 2. Петлевой монополь, содержащий в своем ядре $m$ шаровых монополей, $m = 3$. В ядре каждого шарового монополя реализуется локальная (калибровочная) $P$-симметрия. В остальной части ядра (бублика) петлевого монополя реализуется локальная $G$-симметрия, вне ядра – локальная $H$-симметрия

Рассмотрим теперь теорию ЯМХ с двойным нарушением симметрии типа: $P \to G \to H$ ($P$, $G$, $H$ – группы Ли, $H \subset G \subset P$). Среди возможных в такой теории топологически нетривиальных конфигураций – нити, содержащие в своих ядрах шаровые монополи [3], и петлевые монополи, содержащие в своих ядрах шаровые монополи (рис. 2). Топологический анализ таких петлевых монополей (сходный с анализом петлевых дефектов в конденсированных средах [6]) показывает, что они устойчивы и классифицируются наборами $(\gamma, \delta, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ – элементами группы

$$\Gamma^m(P, G, H) = \pi_1(H) \times \mathrm{Im}\,(\pi_1(G, H) \xrightarrow{\varphi} \pi_0(H)) \times [A(P, G, H)]^m. \tag{3}$$

Здесь $m$ – число шаровых монополей ($m \geqslant 2$), $\gamma \in \pi_1(H)$, $\delta$-элемент группы $\mathrm{Im}\,\varphi$ –образа гомоморфизма $\varphi$, $\epsilon_i$ – элемент группы

$$(A(P, G, H))_i = ([\pi_1(G)/\mathrm{Ker}\,(\pi_1(G) \xrightarrow{\psi} \pi_1(G, H))] \cap \mathrm{Ker}\,(\pi_1(G) \xrightarrow{\theta} \pi_1(P)))_i \tag{4}$$

$i = 1, \dots, m$, а гомоморфизмы $\varphi$, $\psi$, $\theta$ принадлежат точным последовательностям гомотопических групп и их гомоморфизмов ($\mathrm{Ker}\,\psi$, $\mathrm{Ker}\,\theta$ – ядра гомоморфизмов). Субзаряд $\gamma$ описывает черты шарового монополя, а субзаряд $\delta$ – черты нити, присущие петлевому монополю. Каждый субзаряд $\epsilon_i$ характеризует конфигурацию калибровочного поля на участке ядра (бублика) от $i$-го до $(i+1)$-го "внутреннего "шарового монополя. Субзаряды $\epsilon_{i-1}$ и $\epsilon_i$ вместе описывают $i$-й шаровой монополь. Если $\epsilon_{i-1} = \epsilon_i$, то шаровой монополь неустойчив.

Таким образом, петлевые монополи с непрерывными ядрами (являющиеся сочетаниями шаровых монополей и нитей) и петлевые монополи с ядрами, содержащими шаровые монополи, представляют собой (топологически) устойчивые конфигурации калибровочных полей.

### Литература


1. *Jaffe A., Taubes C.* Vortices and Monopoles, 1980, Boston, Birkhäuser, 288 p.; Geometric Techniques in Gauge Theories-Lect. Not. Math. v. 926, 1982, Berlin, Springer, 320 p.
2. *Vilenkin A.* Nucl. Phys., 1982, **B196**, 240.
3. *Hindmarsh M., Kibble T.W.B.* Phys. Rev. Lett., 1986, **55**, 2398.
4. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства, 1970, М.: Мир, гл. 4, 6.
5. *Ovid'ko I.A., Romanov A.E.* Comm. Math. Phys., 1986, **105**, 443.
6. *Овидько И.А.* ЖЭТФ, 1986, **91**, 1427.



Ленинградский политехнический институт
им. М.И.Калинина



Поступила в редакцию
23 октября 1986 г.