Письма в ЖЭТФ, том 43, вып. 2, стр. 59 – 62 *25 января 1986 г.*

ВАКУУМНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ В СУПЕРСТРУНАХ, СВЯЗАННЫЕ С ПОЛУПРОСТЫМИ АЛГЕБРАМИ ЛИ

Д.Г.Маркушевич[1], *М.А.Ольшанецкий*[2], *А.М.Переломов*[2]

Строится класс вакуумных конфигураций в теории суперструн при компактификации из десяти измерений в четыре. Они получаются факторизацией торов полупростых групп Ли по конечным группам симметрий. Приводится полный список для симметрий, порожденных преобразованием Кокстера, и вычисляется число поколений.

1. Одним из важнейших аспектов теории суперструн [1] является компактификация из десяти измерений в четыре. Общепринятая точка зрения состоит в том, что внутреннее шестимерное пространство должно быть кэлеровым и Риччи-плоским [2], так называемым пространством Калаби – Яо (ПКЯ). ПКЯ существенно определяет вид низкоэнергетического лагранжи-

[1] Институт проблем механики АН СССР.

[2] Институт теоретической и экспериментальной физики.

ана. Так, число поколений равно половине модуля эйлеровой характеристики; результат нарушения калибровочной симметрии зависит от вида фундаментальной группы [3], а юкавские константы получаются из индексов пересечения четырехмерных поверхностей в ПКЯ [4]. В настоящее время построено некоторое количество примеров ПКЯ, хотя их общая классификация неизвестна. Дальнейший прогресс в теории суперструн в значительной степени зависит от нашего понимания структуры ПКЯ, т. е. вакуумных конфигураций. Полезно иметь по возможности широкий список ПКЯ, содержащий как простые методические примеры, так и феноменологически приемлемые случаи.

В настоящей работе мы строим новые примеры ПКЯ, пользуясь одним из известных способов [9]. Он заключается в следующем. Рассматривается трехмерный комплексный тор $T^3_{\mathbb{C}}$, на котором действует конечная подгруппа Γ группы SU_3. Неподвижные точки группы Γ порождают сингулярности в факторпространстве $K_0 = T^3_{\mathbb{C}}/\Gamma$. Средства алгебраической геометрии позволяют сгладить эти сингулярности (разрешить особенности) [5], после чего мы получим уже гладкое ПКЯ K. Выбор подгруппы Γ и процедуры разрешения особенностей определяется тем, что в результате должно получиться ПКЯ. Такой способ построения ПКЯ обладает, в частности, тем преимуществом, что позволяет извлекать информацию о спектре струны не прибегая к сложной процедуре разрешения особенностей, а работая на особом многообразии K_0, которое устроено относительно просто [8].

2. В настоящей работе мы строим ПКЯ из вещественных торов T^6, на которых действуют большие группы симметрий. Все они являются максимальными торами полупростых групп Ли. (Отметим, что не все комплексные торы с симметриями из SU_3 получаются таким образом. Общую ситуацию мы рассмотрим в отдельной публикации). Тор T^6 определяется заданием периодов – шести векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ в $\mathbb{R}^6$, которые являются корневыми векторами соответствующей полупростой алгебры Ли G [6]. На нем естественно действует группа Вейля W алгебры G – группа, порожденная отражениями s_j, $j = 1, \ldots, 6$ в гиперплоскостях, ортогональных простым корням α_j. Здесь в качестве Γ будем рассматривать циклическую подгруппу в W: $C = \{1, c, c^2, \ldots, c^{h-1}\}$ $(c^h = 1)$, где $c = s_1 \ldots s_6$ – так называемый элемент Кокстера, h – число Кокстера. Неподвижные точки группы C – векторы фундаментальных весов $\omega_1, \ldots, \omega_6$; следует однако иметь в виду, что на торе некоторые из них могут совпадать. Можно рассмотреть также обобщенное преобразование Кокстера, включающее в себя внешний автоморфизм графа Дынкина системы корней [7]. Преобразование Кокстера имеет l собственных значений

$$\lambda_j = \exp\frac{2\pi i}{h} m_j, \qquad \lambda_j = \lambda_{l-j+1}, \qquad j = 1, \ldots, l, \tag{1}$$

где l – ранг алгебры. В нашем случае $l = 6$.

3. Построение ПКЯ разбивается на несколько этапов.

а) Описание комплексных структур на T^6, инвариантных относительно группы C. Этот пункт не вызывает затруднений. В соответствии с (1) комплексной координате z_k отвечает собственное значение λ_{j_k}, $k = 1, 2, 3$, а сопряженной координате $\bar{z}_k$ собственное значение $\bar{\lambda}_{j_k}$. Выбор трех комплексных координат превращает тор T^6 в комплексный тор $T^3_{\mathbb{C}}$.

б) Выбор среди всевозможных комплексных структур такой, в которой голоморфная 3-форма $dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3$ на $T^3_{\mathbb{C}}$ инвариантна относительно C. В этом случае на особом факторпространстве $K_0 = T^3_{\mathbb{C}}/C$ будет иметься голоморфная 3-форма. Здесь возникает запрет на целый ряд алгебр.

в) Разрешение особенностей. Вместо особых точек, соответствующих неподвижным точкам степеней элемента Кокстера c на $T^3_{\mathbb{C}}$, вклеиваются комплексные пространства, состоящие, вообще говоря, из нескольких каким-то образом пересекающихся комплексных поверхностей. Для трехмерных циклических факторособенностей, подчиненных требованию предыдущего пункта (существование голоморфных 3-форм) всегда существует такое разрешение,

что на нем также имеется ненулевая 3-форма. Разрешая таким каноническим образом особые точки K_0, мы получаем ПКЯ K.

г) Вычисление топологических характеристик K. Важнейшая из них – эйлерова характеристика, половина модуля которой равна разности между числом поколений и антипоколений [2,8]. В работе [8] высказано предположение, что эйлерову характеристику $\chi(K)$ можно считать упрощенно, рассматривая струну на особом многообразии K_0. Обозначим через h порядок группы Г, а через $\chi(g_1, g_2)$ – эйлерову характеристику многообразия, состоящего из неподвижных точек коммутирующих преобразований g_1 и g_2. Тогда

$$\chi(K) = \frac{1}{h} \sum_{g_1 g_2 = g_2 g_1} \chi(g_1, g_2). \qquad (2)$$

Эту формулу можно строго доказать методами торической геометрии в случае, когда группа Г абелева, что отвечает рассматриваемой ситуации.

Вычисление юкавских констант нужно проводить на полном многообразии K. Анализ примеров показал, что 85 – 95 % юкавских констант зануляется.

Другая важная характеристика – фундаментальная группа $\pi_1(K)$. Она указывает на число нестягиваемых контуров в K. Ненулевые значения вильсоновских интегралов по таким контурам приводят к тому же эффекту, что и хиггсовские поля в присоединенном представлении калибровочной группы [2]. Таким образом, структура группы $\pi_1(K)$ указывает на характер нарушения калибровочной симметрии. Можно доказать, что в тех случаях, когда $\chi(K) \neq 0$, порядок фундаментальной группы $\pi_1(K)$ равен значению характеристического многочлена $P(x)$ элемента c в точке $x = 1$, т. е. числу N неподвижных точек элемента c на T^6 [1)]. Вычисление фундаментальной группы проводится методом Ван Кампена.

Тип симметрии	Показатели	$N = \lvert \pi_1(K) \rvert$	$\chi(K)$
1. $A_2^{(1)} \times A_2^{(1)} \times A_2^{(1)}$	$\frac{1}{3}(111)$	27	72
2. $A_2^{(1)} \times D_4^{(1)}, A_1^{(1)} \times A_5^{(1)}$	$\frac{1}{6}(123)$	12	48
3. $B_2^{(1)} \times B_4^{(1)}, B_2^{(1)} \times D_4^{(2)}$	$\frac{1}{8}(125)$	4	48
4. $B_4^{(1)} \times D_2^{(1)}, D_2^{(1)} \times D_4^{(2)}$	$\frac{1}{8}(134)$	8	48
5. $A_2^{(1)} \times D_4^{(3)}, A_2^{(1)} \times F_4^{(1)}, E_6^{(1)}$	$\frac{1}{12}(147)$	3	48
6. $A_2^{(1)} \times G_2^{(1)} \times G_2^{(1)}$	$\frac{1}{6}(114)$	3	48
7. $D_2^{(1)} \times F_4^{(1)}$	$\frac{1}{12}(156)$	4	48
8. $A_6^{(1)}$	$\frac{1}{7}(124)$	7	48
9. $A_3^{(1)} \times A_3^{(1)}$	$\frac{1}{4}(112)$	16	48

1) В этом случае калибровочная группа E_6 нарушается с сохранением ранга [3]. Например, до $SU_3^c \times SU_2 \times \times U_1 \times U_1 \times U_1$.

4. Приведем список полупростых алгебр, из которых с помощью такой процедуры получаются ПКЯ. Результаты соберем в таблицу. ПКЯ из первой строки рассматривалось в [2, 3]. В первом столбце таблицы верхний индекс в обозначениях графа Дынкина означает порядок его внешнего автоморфизма. Во втором столбце содержится информация о действии элемента c на $T^3_{\mathbb{C}}$ в форме $\frac{1}{h}(a_1, a_2, a_3)$, где h – порядок c (т. е. число Кокстера), а показатели a_j предписывают выбор комплексных координат z_1, z_2, z_3 на T^6, в которых действие c приобретает вид $(z_1, z_2, z_3) \to (\epsilon^{a_1} z_1, \epsilon^{a_2} z_2, \epsilon^{a_3} z_3)$, $\epsilon = e^{2\pi i/h}$.

5. Кроме подгрупп, порожденных элементом Кокстера, можно рассматривать другие подгруппы W. Например, факторизация алгебры E_6 по циклической группе $\mathbb{Z}_3$, переставляющей ветви расширенной диаграммы Дынкина, приводит к ПКЯ K с $\chi(K) = 0$, которое расслаивается со слоем – поверхностью типа К3 над одномерным комплексным тором.

Авторы благодарят А.И.Воловика за полезное обсуждение.

Литература

1. *Green M.B., Schwarz J.H.* Nucl. Phys., 1981, **B181**, 502; 1982, **B198**, 252; 1982, **B198**, 441; Phys. Lett., 1982, **109B**, 444; 1984, **149B**, 117; *Green M.B., Schwarz J.H., Brink L.* Nucl. Phys., 1982, **B198**, 474.
2. *Candelas P., Horowitz G., Strominger A., Witten E.* Nucl. Phys., 1985, **B258**, 46.
3. *Witten E.* Nucl. Phys., 1985, **B258**, 75.
4. *Strominger A., Witten E.* New Manifold in Superstring Compactification, Princeton University Preprint (1985); *Strominger A.* A three Generation Superstring Compactification, Princeton preprint, 1985; Topology of Superstring Compactification NSF-ITP-85-109; Yukawa Couplings in Superstring Compactification NSF-ITP-85-105.
5. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии, М.: Мир, 1982.
6. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли, М.: Мир, 1972.
7. *Kac V.* Adv. in Math., 1978, **30**, 85.
8. *Dixon L., Harvey J.A., Vafa E., Witten E.* Strings on orbifolds, Princeton University preprint, 1985.
9. *Yau S.T.* In Proceedings of the Symposium on Anomalies Geometry and Topology, ed. by Bardeen, 1985, 395.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
19 декабря 1985г.