Письма в ЖЭТФ, том 43, вып. 4, стр. 153 –155 *25 февраля 1986 г.*

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МОДЕЛИ ИЗИНГА И МОДЕЛИ ФЕРМИОНОВ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

М.А.Бершадский, И.Д.Вайсбурд, А.А.Мигдал

Получено представление майорановскими фермионами, "живущими" на римановой поверхности, модели Изинга на нерегулярной триангулированной решетке произвольной топологии.

Представляет интерес возможность моделировать фермионные степени свободы струны с помощью изинговских спинов. Эта возможность основана на том, что как система изинговских спинов, так и фермионы, "живущие" на поверхности и взаимодействующие с ее кривизной, приводят к появлению в выражении для статсуммы наряду с суммой по случайным поверхностям суммирования по замкнутым несамопересекающимся путям на поверхности [1]. Это актуально в связи с изучением теории случайных триангулированных поверхностей [2], метрические свойства которых определяются типом триангуляции (например, скалярная кривизна в заданной точке i есть $\frac{\pi}{n_i}(n_i - \sigma)$, где n_i – число ребер, выходящих из точки i).

В настоящей работе получено фермионное представление для модели Изинга на нерегулярной триангулированной решетке произвольной топологии. Приведем ее основные результаты.

1. Доказана эквивалентность модели Изинга со спинами $\sigma = \pm 1$ в вершинах триангулированной решетки Γ с гамильтонианом

$$H = -h \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \tag{1}$$

($\langle ij \rangle \in \Gamma$ – ребра решетки) системе майорановских фермионов ψ_α $(\alpha = 1,2)$, помещенных в вершины дуального графа Γ^* (рис. 1), описываемой действием

$$S(\psi) = \sum_{\langle ij \rangle \in \Gamma^*} \overline{\psi}_\alpha(i) P_{\alpha\beta}(ij) \psi_\beta(j) + \sum_{k \in \Gamma^*} m \overline{\psi}_\alpha(k) \psi_\alpha(k), \tag{2}$$

$$m = e^{-2h}, \tag{3}$$

$$\overline{\psi}_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \psi_\beta . \tag{4}$$

Любая решетка топологии сферы может быть спроектирована без самопересечений на плоскость (риманову поверхность рода 0). При этом каждое ребро приобретает двумерное направление $\pm \mathbf{n}(ij)$ (выбор знака не существен). Введем двумерный матричный вектор ($\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_3)$ (σ_i – матрицы Паули). Тогда

$$P_{\alpha\beta}(ij) = \alpha(ij) \{1 + (\mathbf{n}(ij) \vec{\sigma})\} . \tag{5}$$

Множители $\alpha(ij)$ зависят от четырех углов, примыкающих к ребру $\langle ij \rangle$ на плоскости и являются аналогом спин-связности (рис. 1). Матрицы $P_{\alpha\beta}(ij)$ обладают двумя важными свойствами.

А. Для любого замкнутого контура на дуальном графе $\gamma(i_1 i_2 \ldots i_n i_1)$ справедливо

$$\mathrm{Sp} P(i_1 i_2) P(i_2 i_3) \ldots P(i_n i_1) = -1. \tag{6}$$

Б. Для любого ребра $\langle ij \rangle \in \Gamma^*$

$$P(ij) P(ij) = 0. \tag{7}$$

При выполнении этих свойств

$$Z_\sigma(h) = \sum_{\{\sigma\}} e^{H(h,\sigma)} = Z_\psi^{(0)} = \int \prod_{i,\alpha} d\psi_\alpha(i) e^{-S(\psi)}. \tag{8}$$

Второе свойство матриц P означает отсутствие в сумме по непересекающимся контурам, в виде которой представим интеграл Березина в (8), контуров, не содержащих внутри себя вершин решетки Γ.

Отметим, что в случае правильной триангулированной решетки, моделирующей поверхность без внутренней кривизны, действие $S(\psi)$ совпадает с полученным ранее в работе Доценко [3].

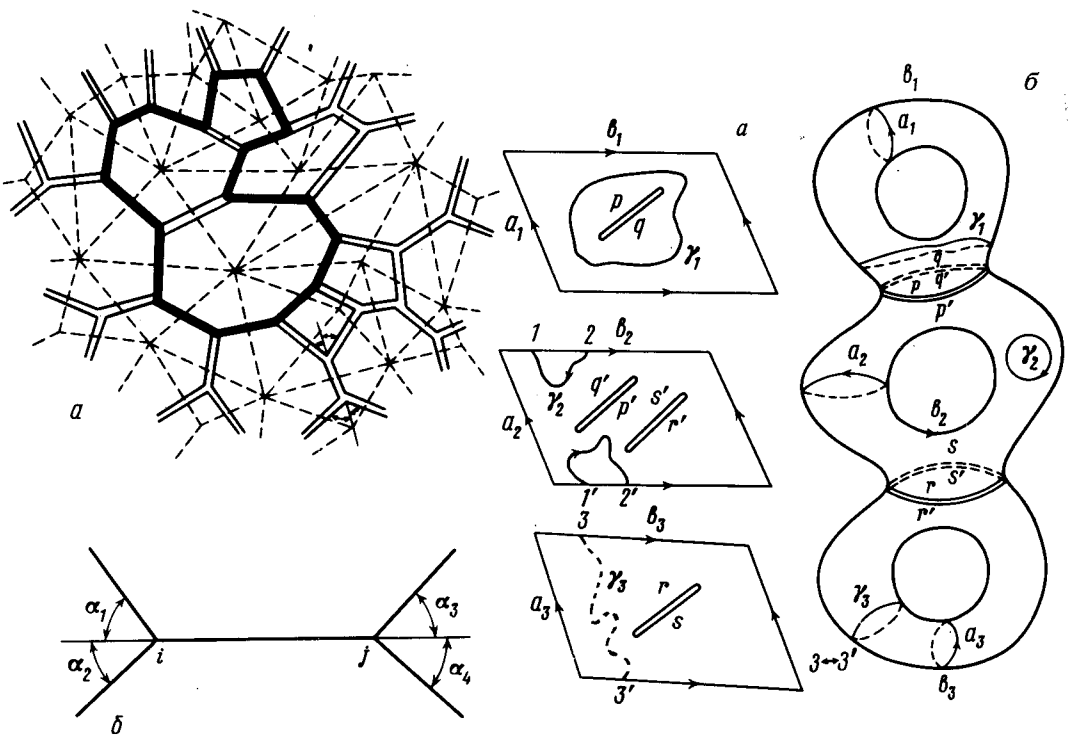

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 1. *а* – Штрихованной линией проведена решетка Γ со спинами σ в узлах, двойной-дуальный граф Γ^* с фермионами в вершинах. Фермионный контур $\gamma(i_1 \ldots i_n i_1)$ ограничивает область постоянного спина и обозначает один из членов в разложении Z_ψ по петлям (жирная линия). Ребрам γ отвечают соответствующие матрицы P. *б* – от углов α_1, α_2, α_3, α_4 зависит множитель $\alpha(ij)$ на ребре $\langle ij \rangle \in \Gamma^*$

Рис. 2. *а* – Три листа римановой поверхности представляют поверхность с тремя ручками. Стороны разрезов $(p \leftrightarrow p', q \leftrightarrow q'', \ldots)$ и противоположные стороны параллелограммов отождествляются при склейке. Сплошной линией нарисованы петли, гомологичные нулю и входящие в статсумму $Z_\psi^{(3)}$. Петля, проведенная штриховой линией, входит в $Z_\psi^{(0)}$ с фактором $\epsilon_{b_3} = \pm 1$ и выпадает из $Z_\psi^{(3)}$; *б* – поверхность рода $g = 3$

2. Результат пункта 1 обобщен на случай поверхности произвольной топологии.

Фермионный путь должен ограничивать область постоянного спина и потому должен быть гомологичным нулю. Это приводит к тому, что статсумма $Z_\psi^{(g)}$ для поверхности рода g отличается по виду от $Z_\psi^{(0)}$ из-за нетривиальности группы гомологий H_1^g. Для построения $Z_\psi^{(g)}$ необходимо спроектировать поверхность на g экземпляров параллелограмма $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$ $(i = 1, \ldots, g)$, т.е. на g листов римановой поверхности, профакторизованной по дискретной группе трансляций, задаваемой векторами $\{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i\}$. На листах римановой поверхности сделаны разрезы (указанные на рисунке стороны отождествляются при склейке) (рис. 2).

Фермионное поле не является однозначной функцией на поверхности рода g. Любой фермионный детерминант (в том числе и $Z_\psi^{(0)}$) на этой поверхности зависит от $2g$ граничных условий, задаваемых на сторонах параллелограммов. Граничные условия задаются набором знаковых множителей $\{\epsilon_{a_i}, \epsilon_{b_i}\}$, где $\epsilon_{a_i} = \pm 1$, $\epsilon_{b_i} = \pm 1$. Если x принадлежит стороне параллелограмма, то

$$\psi(x) = \epsilon_{ai}\,\psi(x + a_i) \quad \text{либо} \tag{9}$$

$$\psi(x) = \epsilon_{b_i}\,\psi(x + b_i). \tag{10}$$

Правильная статсумма является суперпозицией детерминантов при всевозможных $\{\epsilon_{a_i}, \epsilon_{b_i}\}$

$$Z_\psi^{(g)} = \frac{1}{4^g} \sum_{\{\epsilon_{a_i}, \epsilon_{b_i}\}} Z_\psi^{(0)}(\epsilon_{a_i}, \epsilon_{b_i}). \tag{11}$$

В частном случае регулярной решетки с топологией тора $(g = 1)$ эта формула была упомянута Редже и др. [4].

Справедливо следующее утверждение. Статсумма $Z_\psi^{(g)}$ (11) представима в виде суммы по замкнутым (необязательно связным) несамопересекающимся путям на графе Γ^*, гомологичным нулю. Если член этой суммы содержит пути, находящиеся более чем на одном римановом листе, то таковых четное число. (Последнее необходимо для выполнения первого свойства матриц P).

При выполнении двух условий на матрицы $P(ij)$ статсумма фермионной системы $Z_\psi^{(g)}$ есть $e^{hN} \sum_{L=0}^{\infty} e^{-2hL} M(L)$ (N – число точек решетки, $M(L)$ – количество гомологичных нулю, замкнутых, несамопересекающихся контуров длины L на дуальном графе Γ^*) и в точности совпадает со статсуммой системы изинговских спинов $Z(\sigma)$.

Замечательно, что $Z_\psi^{(g)}$ не зависит от нефизических параметров фермионной модели ($\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$, α_{ij}, $\mathbf{n}_{ij}$ и т.д.) и определяется лишь топологией решетки и типом триангуляции (числами n_i, например).

В заключение отметим, что в отличие от квадратной решетки, рассмотренной Шерманом и Вдовиченко [5], триангулированная решетка автоматически обеспечивает отсутствие самопересечений путей при квадратичности действия по фермионным полям. Из трех ребер, выходящих из вершины $i \in \Gamma^*$, либо 2, либо 0 являются фермионными линиями (рис. 1). Подробный вывод основных результатов будет опубликован.

Литература

1. *Migdal A.* Nucl. Phys., 1981, **B189**, 253.
2. *Kazakov V.A., Kostov I.K., Migdal A.A.* Phys. Lett., 1985, **157B**, 295.
3. *Доценко В.С., Доценко Вл.С.* Письма в ЖЭТФ, 1981, **33**, 40.
4. *Лунд Ф., Разетти М., Редже Т.* ТМФ, 1977, **33**, 246.
5. *Sherman S.* Joum. Math. Phys., 1960, **1**, 202; 1963, **4**, 1213; *Вдовиченко Н.В.* ЖЭТФ, 1964, **47**, 715; 1965, **48**, 526.

Научный совет
по комплексной проблеме "Кибернетика"
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20 декабря 1985 г.