Письма в ЖЭТФ, том 43, вып. 4, стр. 161 –163 *25 февраля 1986 г.*

СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА СТРУНЫ ПОЛЯКОВА ВЫРАЖАЕТСЯ ЧЕРЕЗ ТЭТА-ФУНКЦИИ

Ю.И.Манин

Дана формула для меры Полякова на пространстве римановых поверхностей рода $p \geqslant 2$ в терминах тэта-функций.

Квантовая теория струны Полякова [1] определяется континуальным интегралом по поверхностям в эвклидовом d-мерном пространстве. Статистическая сумма для замкнутой струны пишется в виде ряда "теории возмущений" $Z = \sum_{p \geqslant 0} Z_p$. Слагаемое Z_p отвечает

p-петлевому вкладу и имеет вид $\int\limits_{M_p} d\pi_p$, где M_p – пространство конформных классов компактных римановых поверхностей рода p (сфера с p ручками), $d\pi_p$ – некоторая мера на нем ([2, 3]). Цель этой работы – дать выражения для $d\pi_p$ в критической размерности $d = 26$ (и аналогичной меры $d\pi_p^f$ для фермионной струны при $d = 10$) через тэта-функции [6]. Предложенные недавно формулы для $d\pi_p$ и $d\pi_p^f$ получались в результате преобразования детерминантов двух эллиптических операторов в сумму по длинам геодезических с помощью формулы следа Сельберга [3]. Наш подход в этой работе совершенно иной. Он опирается на голоморфную, а не риманову геометрию. Это стало возможным после известной работы А.Белавина и В.Книжника, установивших, что $d\pi_p$ есть "квадрат модуля" голоморфной формы на M_p с известными особенностями. Формулы, данные в [3] и в этой работе, выражают одну и ту же величину через различные инварианты римановой поверхности, и могут быть обе полезны для получения свойств меры Полякова. В наших вычислениях существенно использованы работы Мамфорда [4] и Фальтингса [5].

Наша основная формула при $p \geqslant 2$ имеет следующий вид (случай $p = 1$ много проще и был известен раньше):

$$d\pi_p = c_p K(-i)^{3p-3} W_1 \overline{W}_1 \ldots W_{3p-3} \overline{W}_{3p-3}\,, \tag{1}$$

$$K = (\det \operatorname{Im} \tau)^{-4} \,|\theta(0,\tau)|^{-16} \frac{|\det(\omega_j(R_k))|^{16} \prod\limits_{j=1}^{p} G(R_j, Q)^{16} \prod\limits_{j<k} G(P_j, P_k)^4}{|\det(\beta_i(P_j))|^2 \left|\det\begin{pmatrix}\eta_i(P_j)\\ a_j\end{pmatrix}\right| \prod\limits_{j<k} G(R_j, R_k)^{16}}\,.$$

Здесь W_i – $(1,0)$ – формы на пространстве M_p, отвечающие некоторому базису w_i голоморфных дифференциалов (квадратичных) на римановой поверхности X, τ – нормированная матрица периодов этой поверхности, θ – ее тэта-функция, $\log G$ – функция Грина инвариантного оператора Лапласа, P_j, R_k, Q – некоторые специальные точки на X.

Опишем эти объекты несколько подробнее (почти все детали можно найти в [6]). Пусть X – риманова поверхность, зависящая от параметров в некоторой области M_p. Представим ее в виде многоугольника, сделав классическую систему разрезов (a_i, b_i), $i = 1, \ldots, p$. Выберем базис голоморфных 1-форм $\varphi = (\varphi_i)$ с $\int\limits_{a_i} \varphi_j = \delta_{ij}$ и положим $\tau = (\tau_{ij}) = (\int\limits_{b_i} \varphi_j)$, $\omega_i = \sum\limits_j (\sqrt{\operatorname{Im}\tau}\,)^{-1}_{ij} \varphi_j$. Тэта-функция Римана определяется рядом $\theta(z,\tau) = \sum\limits_{m \in Z^p} \exp 2\pi i[m^t z + \frac{1}{2} m^t \tau m]$. Положим $\mu = \frac{i}{2p} \sum\limits_{j=1}^{p} \omega_j \wedge \overline{\omega}_j$ и введем инвариантный лапласиан на X формулой $\Delta f = -\frac{i}{\pi\mu} \partial \overline{\partial} f$, где $\partial \overline{\partial} f = \frac{1}{4} dz \wedge d\overline{z}\,(\partial_x^2 + \partial_y^2)$, $z = x + iy$ – локальная координата на X. Определим $G(P, Q)$ из формулы $f(P) = -\int\limits_X \log G(P,Q) \Delta f(Q) \mu(Q)$. Можно также выразить $G(P, Q)$ через функцию тэта и абелевы интегралы; это выражение мы опускаем. Выберем на X точки $P_1, \ldots, P_{p-1}$ (зависящие от параметров) так, чтобы на X существовала голоморфная 1-форма с нулями второго порядка во всех P_i (это можно сделать конечным числом способов). Пусть ν^2 – эта форма. Нормируем ее условием $|\nu^2(P)| = \prod\limits^{p-1} G(P_i, P)$ для всех P (см. ниже). Пользуясь ν, можно ввести дифференциалы полуцелой степени на X. Выберем базисы голоморфных дифференциалов на X степени $3/2$ вида $(v_1, \ldots, v_{2p-2}) = (\nu\omega_1, \ldots, \nu\omega_p;\ \eta_1, \ldots, \eta_{p-2})$ и степени 2 вида $(w_1, \ldots, w_{3p-3}) = (\nu^2\omega_i;\ \nu\eta_j; \beta_1, \ldots, \beta_{p-1})$. Если $\omega = f(z)dz$, положим $|\omega(P)| = |f(P)| \lim\limits_{Q \to P} G(P, Q)$ ·

$\cdot\ |z(Q)-z(P)|^{-1}$. Для дифференциалов степени m положим $|\omega(P)| = |(\omega)^{1/m}(P)|^m$. Определим локальные координаты z_j в точках P_j условием $\nu^2 = z_j^2 dz_j$ и положим $a_j = (\nu z_j^{-1}(P_j))^3$. Наконец, выберем такие точки $R_1, \ldots, P_p, Q$ на X, чтобы существовала мероморфная 1-форма на X с нулями второго порядка в $R_1, \ldots, R_p$ и полюсом второго порядка в Q. Потребуем при этом, чтобы класс $R_1 + \ldots + R_p - Q$ был классом Римана Δ ([6], стр. 7). Это завершает описание всех обозначений в (1), кроме константы c_p, которая здесь не определена. Совместную нормировку всех c_p, видимо, можно сделать, добившись асимптотического согласования мер в пределе, когда X приобретает двойную точку.

Мера для фермионной струны имеет аналогичную структуру:

$$d\pi_p^f = c_p^f L(-i)^{5p-5} \prod_{i=1}^{3p-3} W_i \overline{W}_i \prod_{j=1}^{2p-2} \partial^2 / \partial V_i \partial \overline{V}_i, \tag{2}$$

$$L = (\det \operatorname{Im} \tau)^{-5/2} |\theta(0,\tau)|^{-10} \frac{|\det(\omega_j(R_k))|^{10} \prod_{j=1}^{p} G(R_j, Q)^{10} \prod_{j<k} G(P_j, P_k)^2}{|\det(\beta_i(P_k))|^2 \prod_{j<k} G(R_j, R_k)^{10}}.$$

Она определена на комплексном суперпространстве M_p^f, подложка которого совпадает с M_p, а нечетными локальными аналитическими координатами являются дифференциалы $(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_{2p-2})$ степени 3/2 на X (ср. [3]). Дуальный базис нечетных векторных полей на M_p^f мы и обозначили $(\partial/\partial V_i)$. Таким образом, элемент объема Березина, фигурирующий в (2), указан обозначением типа $dxdy\,\partial_\xi \partial_\eta$, а не $dxdy d\xi d\eta$: оно лучше передает правило преобразования при смене координат. Остальные обозначения в (2) те же, что и в (1). Строго говоря, формула (2) должна считаться гипотетической, пока для фермионной меры не проверен аналог теоремы Белавина – Книжника. Кроме того, у суперпространства M_p^f есть еще одна связная компонента, на которой (2) следует несколько видоизменить. Я надеюсь вернуться к этим вопросам в другой публикации.

Пользуюсь случаем поблагодарить А.Белавина, А.Бейлинсона и А.Шварца за многочисленные и очень полезные обсуждения по теме этой работы.

Литература

1. *Polyakov A.M.* Phys. Lett., 1981, **103B**, 207.
2. *Alvarez O.* Nucl. Phys., 1983, **B216**, 125.
3. *Баранов М.А., Шварц А.С.* Письма в ЖЭТФ, 1985, **42**, 340.
4. *Mumford D.* Ens. Math., 1977, **23**, 39.
5. *Faltings G.* Ann. of. Math., 1984, **119**, 387.
6. *Fay J.D.* Theta Functions on Riemann surfaces, 1973, Springer Lecture Notes in Math., **352**, Berlin.

Математический институт им. В.А.Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
16 января 1986 г.