Письма в ЖЭТФ, том 43, вып. 4, стр. 178 –182 *25 февраля 1986 г.*

ТЕОРИЯ "КВАЗИ-ЧАПЛЫГИНСКИХ" НЕУСТОЙЧИВЫХ СРЕД И "ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ПРИНЦИП" ОТБОРА СПОНТАННЫХ РЕШЕНИЙ

С.К. Жданов, Б.А.Трубников

Замечено, что большое число (около 20) неустойчивых сред описываются уравнениями идеального газа, но с *отрицательной сжимаемостью.* Показано, что эти "квази-чаплыгинские" уравнения сводятся к уравнению Лапласа, и наибольший интерес представляют лишь три "спонтанно-эволюционных" решения.

1. "Квази-чаплыгинские" среды

Рассмотрим одномерный идеальный газ, давление которого описывается адиабатой $p(t,x) = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$, где $\rho(t,x)$ – плотность, а $p_0 = \text{const}$ и $\rho_0 = \text{const}$ – невозмущенные значения. Если считать $\gamma = -|\gamma|$ и ввести "эффективную приведенную плотность" $\bar\rho = \rho/\rho_0$, то получим уравнения для скорости $v(t,x)$ и $\bar\rho(t,x)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar\rho + \frac{\partial}{\partial x}v\bar\rho = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t}v + v\frac{\partial}{\partial x}v = c_0^2(\bar\rho)^{-\nu}\frac{\partial}{\partial x}\bar\rho, \tag{1}$$

где $\nu = 2 + |\gamma|$ и $c_0^2 = |\gamma| p_0/\rho_0$, однако в дальнейшем мы будем рассматривать ν и c_0 как произвольные действительные параметры. Авторами замечено, что уравнения такого типа описывают в длинноволновом приближении поведение весьма большого числа (но конечно, не всех) неустойчивых сред, в частности:

1) "газа Чаплыгина" с $\gamma = -1$ (впервые рассмотрен в [1]),
2) "опрокинутую мелкую воду" [2-5],
3) перетяжки на несжимаемом пинче [4-7],
4) перетяжки на сжимаемом пинче [4-6],
5) цилиндр жидкости с поверхностным натяжением [4,5],
6) самофокусировку света [8-10],
7) самосжатие волновых пакетов [10],
8) тиринг-неустойчивость токового слоя плазмы [11],
9) модуляционную неустойчивость в плазме [12],
10) бунемановскую неустойчивость в плазме [13,14],
11) пучковую неустойчивость в плазме [15],
12) апериодическую параметрическую неустойчивость плазмы [16],
13) неустойчивость гравитирующего газового слоя [17]

и ряд других. Среды, описываемые системой (1), и образующие достаточно большой набор, будем называть "квази-чаплыгинскими", так как Чаплыгин в 1902 г. первым рассматривал частный случай газа с $\gamma = -1$ в работе [1].

2. Сведение к уравнению Лапласа

Покажем, что система (1) при любых $\nu \neq 1$ сводится к уравнению Лапласа в некотором трехмерном "фазовом" пространстве.

Для этого введем вместо $\bar{\rho}$ и v новые безразмерные функции

$$r(t, x) = (\bar{\rho})^{-1/2m} > 0; \quad z(t, x) = v/2mc_0, \tag{2}$$

где $m = 1/(\nu - 1)$ – "азимутальное число". Тогда система (1) дает

$$\frac{\partial r}{c_0 \partial t} = r\frac{\partial z}{\partial x} - 2mz\frac{\partial r}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{c_0 \partial t} = -r\frac{\partial r}{\partial x} - 2mz\frac{\partial z}{\partial x}, \tag{3}$$

и если искать обратные зависимости $t = T(r, z)$ и $x = c_0 X(r, z)$ (такой переход называется "преобразованием годографа"), то получим два линейных уравнения

$$X'_r = 2mzT'_r - rT'_z; \quad X'_z = 2mzT'_z + rT'_r, \tag{4}$$

условием совместности которых является уравнение для времени

$$T''_{rr} + \frac{1-2m}{r}T'_r + T''_{zz} = 0. \tag{5}$$

Добавив к r, z фиктивный "угол" φ, будем рассматривать r, φ, z как цилиндрические координаты в трехмерном "фазовом" пространстве, и введем аналог "электростатического потенциала" $\Psi = \psi\cos m\varphi$, где $\psi(r, z) = r^{-m}T$. Тогда из (5) получим уравнение Лапласа

$$\Delta\Psi = \frac{\partial}{r\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\Psi + \frac{\partial^2}{r^2\partial\varphi^2}\Psi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi = 0. \tag{6}$$

В ряде цитированных выше работ по различного рода неустойчивостям фактически были получены некоторые частные решения этого уравнения, например, в [9] для случая $\nu = 0$ рассмотрены полиномиальные решения.

3. "Эволюционный принцип" отбора спонтанных решений

Хотя изучение частных решений и дает определенное представление о поведении среды, но такие решения, как правило, описывают эволюцию "начального толчка", внесенного исследователем. Заметим, что при численном методе решения задача с начальными условиями является единственно возможной постановкой. При этом профиль начального возмущения выбирается исследователем из соображений удобства и простоты решения. Однако, в неустойчивых средах, в отличие от устойчивых, могут развиваться самопроизвольные спонтанные возмущения, которые в пределе $t \to -\infty$ отсутствовали, так что выполнялись асимптотические "начальные условия" $v=0$ и $\rho=\rho_0$, что соответствует $r=1$ и $z=0$ в пределе $t \to -\infty$. Для этих особых возмущений, которые можно называть "спонтанно-эволюционными", введенный выше электростатический потенциал $\Psi(r, \varphi, z)$ должен порождаться только лишь такими "зарядами", которые расположены на единичной окружности $r=1, z=0$ в "фазовом" пространстве r, φ, z. Такое требование мы будем называть "эволюционным принципом" отбора спонтанных решений.

4. Три простейших спонтанных решения

Чтобы удовлетворить указанному "эволюционному принципу", следует решать уравнение Лапласа (6) в тороидальных координатах ζ, η, φ вводимых соотношениями

$$r=\sigma \operatorname{sh} \xi \;; \quad z=\sigma \sin \eta ; \quad \sigma=(\operatorname{ch} \xi+\cos \eta)^{-1} ; \quad (dr)^2+(dz)^2=(\sigma d\xi)^2+(\sigma d\eta)^2,. \qquad (7)$$

и искать решения вида

$$\Psi(\xi, \eta, \varphi)=\psi(\xi, \eta) \cos m\varphi \;; \quad \psi=\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_p^n(\alpha) \cos n\eta, \qquad (8)$$

так как только такие решения порождаются "зарядами" (круговыми мультиполями), расположенными на окружности $r=1, z=0$. В формуле (8) фигурируют a_n – произвольные коэффициенты при "вторых" функциях Лежандра $Q_p^n(\alpha)$ с целым верхним индексом $n = 0, 1, 2, \ldots$, нижним индексом $p=m-1/2$ и аргументом $\alpha=\operatorname{cth} \xi>1$. Простейшими являются два первых члена – кулоновский и дипольный, порождающие три "фундаментальных" решения

$$\begin{aligned}
t/t_* &= T_1(\xi, \eta)=-r^p Q_p^0(\alpha)<0 && (-\infty<\eta<\infty) \\
t/t_* &= T_2(\xi, \eta)=r^p Q_p^1(\alpha) \cos \eta<0 && (-\pi/2<\eta<\pi/2) \\
t/t_* &= T_3(\xi, \eta)=-r^p Q_p^1(\alpha) \cos \eta<0 && (\pi/2<\eta<3\pi/2)
\end{aligned} \qquad (9)$$

где $t_*>0$ – единственный параметр, указывающий характерное время эволюции и одновременно характеризующий длину возмущения вдоль оси x. Уравнения (4) для координаты можно записать в виде

$$\nabla X=2mz\nabla T-r[e_\varphi \nabla T] \;; \quad X_\eta'=2mzT_\eta'-rT_\xi' \qquad (10)$$

из которого путем интегрирования по углу η нетрудно найти и координату $x=c_0X(\xi, \eta)$ для трех случаев (9), на чем мы не будем останавливаться. Первый случай T_1 дает периодическое по x возмущение, второй T_2 ("лево-дипольный") дает одиночную ямку параметра r, а третий T_3 ("право-дипольный") дает одиночный горб параметра r, и эти три случая наглядно описывают наиболее простые типы спонтанной эволюции всех перечисленных выше неустойчивых сред, нелинейное описание которых в длинноволновом приближении удается свести к "квази-чаплыгинской" системе (1).

5. Многомерные автомодельные решения

В ряде случаев задача допускает не только одномерную $(N=1)$, но и двух $(N=2)$ или трехмерную $(N=3)$ постановку. При наличии симметрии для этих трех случаев $(N=1,2,3)$ уравнения следует записывать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}+r^{1-N} \frac{\partial}{\partial r}(\bar{\rho} v r^{N-1})=0 ; \quad \frac{\partial}{\partial t} v+v \frac{\partial v}{\partial r}=c_0^2(\rho)^{-\nu} \frac{\partial}{\partial r} \bar{\rho}, \qquad (11)$$

и для них можно указать точные автомодельные, но не удовлетворяющие "эволюционному принципу" решения (здесь $\tau = t - t_* < 0, a = 2m/(2m - N)$)

$$v = a\frac{r}{\tau}\ ;\ \bar{\rho} = \left[(\bar{\rho}_0)^{-1/m} - N\left(\frac{v}{2mc_0}\right)^2\right]^{-m}\ ;\ \bar{\rho}_0(t) = \left|\frac{\tau_0}{\tau}\right|^{aN}, \tag{12}$$

соответствующие вполне определенным начальным условиям при $t = 0$, и "взрывающиеся" $(\bar{\rho} \to \infty)$ в момент времени $t = t_*$.

6. Пример нелинейной бунемановской неустойчивости

В качестве примера рассмотрим, следуя работе [14], бунемановскую неустойчивость в плазме, возникающую тогда, когда электроны (e) движутся вначале со сверхтепловой скоростью $v_0 > v_{Te}$ относительно ионов (i), вначале покоившихся, а затем описываемых уравнениями

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} nv = 0;\ \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e}{m_i}E = -\frac{e}{m_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{13}$$

где $v = v_i$, $n = n_i = n_e$, а φ – потенциал электрического поля. Для электронов можно считать сохраняющимися полный поток $nv_e = n_0 v_0$ (электронный ток) и энергию $m_e v_e^2/2 - e\varphi = m_e v_0^2/2$, после чего система (13) приводится к "квази-чаплыгинскому" виду (1)

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\bar{\rho} v = 0;\ \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = c_0^2(\bar{\rho})^{-3}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x}, \tag{14}$$

где $\bar{\rho} = n/n_0$, $c_0^2 = v_0^2 m_e/m_i$, а параметр ν, как и у "газа Чаплыгина", равен $\nu = 3$, так что "азимутальное число" равно $m = 1/2$, а $p = 0$. Первое "кулоновское" решение (9) и уравнение (4) при этом дают

$$\frac{t}{t_*} = T_1 = -Q_0^0(\alpha) = -\xi\ ;\ \frac{x}{c_0} = X = 2t_* \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{th}\frac{\xi}{2}\operatorname{tg}\frac{\eta}{2}\right), \tag{15}$$

и если исключить переменные ξ, η, то получаем периодические по x выражения для плотности квазинейтральной плазмы, скорости ионов и потенциала при бунемановской неустойчивости

$$\frac{n}{n_0} = \frac{-\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau - \cos\chi}\ ;\ \frac{v}{c_0} = \frac{\sin\chi}{\operatorname{sh}\tau}\ ;\ \varphi = \frac{1 - 2\operatorname{ch}\tau\cos\chi + \cos^2\chi}{\operatorname{sh}^2\tau}\left|\frac{m_e v_0^2}{2e}\right|, \tag{16}$$

где $\tau = t/t_* < 0$, $\chi = x/c_0 t_*$. Это самое простое, явное и удовлетворяющее "эволюционному принципу" решение не было отмечено в работе [14], а также в работе [11], где рассматривалась разрывная ("тиринг") неустойчивость токового слоя плазмы, также аналогичная "газу Чаплыгина". Заметим, что два последних решения (9) описывают одиночные яму и горб плотности в обеих упомянутых задачах.

Таким образом, наши три стандартных эволюционных решения (9), развивающиеся самопроизвольно, полезным образом дополняют картину всех перечисленных в разделе 1 неустойчивостей, хотя несомненную ценность имеют и частные решения, найденные ранее другими авторами.

Авторы признательны Б.Б.Кадомцеву, С.В.Буланову и В.Д.Шафранову за ряд полезных замечаний по работе.

Литература

1. *Чаплыгин С.А.* Избранные труды. М.: Наука, 1976, с. 94.
2. *Book D.L., Ott E., Sulton A.L.* Phys. Fluids, 1974, 17, 676.
3. *Сон Э.Е.* Письма в ЖТФ, 1978, вып. 17, 1023.
4. *Трубников Б.А., Жданов С.К.* Препринт 001-84, М.: изд. МИФИ, 1984.
5. *Трубников Б.А., Жданов С.К.* Физика плазмы, 1986, 6, 191.
6. *Трубников Б.А., Жданов С.К.* Письма в ЖЭТФ, 1985, 41, 292.
7. *Book D.L., Ott E., Lampe H.* Phys. Fluids, 1976, 19, 1982.

8. *Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В.* УФН, 1967, 93, 19.
9. *Гуревич А.В., Шварцбург А.Б.* ЖЭТФ, 1970, **58**, 2012.
10. *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме, М.:Наука, 1976.
11. *Буланов С.В., Сасоров П.В.* Физика плазмы, 1978, **4**, 746.
12. *Веденов А.А., Рудаков Л.И.* ДАН СССР, 1964, **159**, 767.
13. *Белова Н.Г., Галеев А.А., Сагдеев Р.З., Сигов Ю.С.* Письма в ЖЭТФ, 1980, **31**, 551.
14. *Галеев А.А., Сагдеев Р.З., Шапиро В.Д., Шевченко В.И.* ЖЭТФ, 1981, **81**, 572.
15. *Буланов С.В., Сасоров П.В.* ЖЭТФ, 1984, **86**, 479.
16. *Шапиро В.Д., Шевченко В.И.* Кн. Основы физики плазмы, М.: Энергоатомиздат, 1984, т. 2, с. 119.
17. *Поляченко В.Л., Фридман А.М.* Кн. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, М.: Наука, 1976, с. 347.

Московский
инженерно-физический институт

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
27 декабря 1985 г.