Письма в ЖЭТФ, том 43, вып. 6, стр. 270 – 272 *25 марта 1986 г.*

МГД СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЛАЗМЫ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ОТКРЫТОЙ ЛОВУШКЕ

В.В.Арсенин

Указан класс простых ловушек, в которых при соединении с тонкой ловушкой, имеющей кривизну другого знака, возможна МГД устойчивость плазмы низкого давления.

1. В аксиально-симметричных ловушках простейшего типа (с рабочим магнитным потоком, заключенным между катушками и осью) плазма с естественным, спадающим к пробкам распределением давления подвержена желобковой магнитогидродинамической неустойчивости [1]. Обнаруженный недавно [2] пример пробкотрона, устойчивого относительно крупномасштабных желобковых возмущений, указывает на существование ловушек этого типа, в которых при соединении с элементом с противоположным знаком кривизны силовых линий достигается устойчивость относительно всех мод. Ниже найден класс ловушек, обладающих этим свойством. Для максимального упрощения рассматривается случай сильной анизотропии, когда поперечное давление $p_\perp$ много больше продольного $p_\parallel$ (малое пробочное отношение или дискообразная плазма около минимума поля).

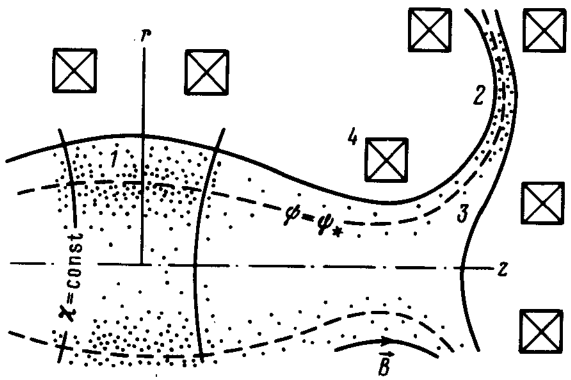

Схема конфигурации: *1* – основная ловушка, *2* – компенсирующая ловушка, *3* – соединительная плазма, *4* – катушки с током

2. Магнитная конфигурация показана на рисунке. Предполагается, что ловушки *1*, *2* соединены плазмой, давление которой пренебрежимо мало, но проводимость высока, так что желобковое возмущение охватывает плазму по всей силовой линии. Пусть 1) ячейка *2* тонкая: $|\partial \ln B/\partial \ln p| \ll 1$ (удалена от оси и/или имеет сильное поле); 2) в ловушке *1* анизотропия велика и относительное изменение вдоль поля величины $\partial B/\partial\psi$, где ψ – отсчитываемая от оси потоковая координата, меньше или порядка $p_\parallel/p_\perp$ (это возможно, например, если данная ловушка имеет экваториальную плоскость симметрии; заметим, что мы пока не требуем, чтобы ловушка относилась к простейшему типу). Тогда критерий МГД устойчивости Крускала – Обермана [3] для плазмы низкого ($\beta = 8\pi(p_\perp + p_\parallel)/B^2 \ll 1$) давления принима-

ет вид [4]

$$W_1 + W_2 > 0, \tag{1}$$

где

$$W_1 = \int \left[-\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{p_\perp + p_\parallel}{B^2}\right)\frac{\partial B}{\partial\psi} + \frac{p_\perp - p_\parallel}{B^3}\left(\frac{\partial B}{\partial\psi}\right)^2 \right]\frac{d\chi}{B}, \tag{2}$$

$$W_2 = -\int \frac{\partial(p_\perp + p_\parallel)}{\partial\psi}\,\frac{\partial B}{\partial\psi}\,\frac{d\chi}{B^3}, \tag{3}$$

χ – продольная координата ($\vec{\nabla}\chi = \mathbf{B}$), интегрирование в $W_{1,2}$ проводится по областям *1, 2* соответственно. Вводя α $(0 < \alpha < 1)$ такое, что $(p_\perp - p_\parallel)_1 \geqslant \alpha(p_\perp + p_\parallel)_1$, получаем из (1) достаточное условие устойчивости

$$W = -\int \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{p}{B^{2+\alpha}}\right)\frac{\partial B}{\partial\psi}\,\frac{d\chi}{B^{1-\alpha}} > 0, \tag{4}$$

где $p = p_\perp + p_\parallel$, интегрирование ведется вдоль всей системы, и в области *2* в комбинации $\partial(p/B^{2+\alpha})/\partial\psi$ существенна лишь $\partial p/\partial\psi$. При $\alpha \to 0$ (т.е. без учета положительного второго слагаемого в (3)) (4) переходит в достаточное условие, приведенное в [4].

Пусть плазма занимает слой около поверхности $\psi = \psi_*$ и в нем $(\psi - \psi_*)\partial(p/B^{2+\alpha})/\partial\psi \leqslant \leqslant 0$[1]. При этом (4) удовлетворяется, если отношение давлений в ловушках *1, 2* таково, что на всех силовых линиях, проходящих через плазму,

$$\int \left(\frac{1}{B^{1-\alpha}}\,\frac{\partial B}{\partial\psi}\right)_{\psi=\psi_*}\frac{p}{B^{2+\alpha}}\,d\chi = 0, \tag{5}$$

и в ловушке *1* в данном слое

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{B^{1-\alpha}}\,\frac{\partial B}{\partial\psi}\right) > 0. \tag{6}$$

Если плазма в элементе *1* находится около экваториальной плоскости симметрии, то (6) можно записать как

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{B^{2-\alpha}\,r}\,\frac{\partial B}{\partial r}\right) > 0. \tag{7}$$

Условие (6) выражается через характеристики силовой линии:

$$\frac{d''}{d} + \frac{k}{r}\cos\theta + \alpha k^2 > 0. \tag{8}$$

Здесь $r(s)$ – расстояние до оси, $k(s)$ – кривизна, $\theta(s)$ – угол между нормалью к поверхности $\psi = \mathrm{const}$ и радиальным направлением, s – длина вдоль силовой линии, $d = r^{-1}(s)B^{-1}(s)$ имеет смысл толщины силовой трубки с единичным потоком, штрих означает производную по s. Отдельные слагаемые в левой части (8) просто интерпретируются. При компенсации средних кривизн (равенство (5)) стабилизация за счет $d'' > 0$ обязана действию "скрытой" (на фоне общего изгибания) вогнутости силовой трубки. Происхождение $k\cos\theta/r$ связано с тем, что величина $\partial B/\partial\psi = -k/r$ в (6) содержит не только кривизну, но и радиальную координату, так что при не зависящей от ψ кривизне производная $\partial B/\partial\psi$ растет с увеличением ψ, поскольку r растет с ψ. Квадратичный по k член описывает влияние большой кривизны магнитного поля.

3. Конкретизируем условие (6) для интересующего нас случая, когда ячейка *1* представляет собой ловушку простейшего типа, см. п. 1. Векторный потенциал поля в такой ловушке определяется одной функцией $b(z)$ – полем на оси:

$$A_\varphi = \frac{b(z)}{2}r - \frac{b''}{16}r^3 + \frac{b^{\mathrm{IV}}}{384}r^5 - \ldots, \tag{9}$$

---

[1] Заметим, что допустимы и профили с отличным от нуля давлением на оси.

причем для продольного удержания нужно, чтобы $b(z)$ имела минимум между пробками, скажем при $z=0$. Рассмотрим ради простоты записи случай экваториальной симметрии и ограничимся выписанными членами разложения (9). При этом (7) сводится к

$$b^{IV}(0) > 4\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{(b''(0))^2}{b(0)} . \qquad (10)$$

Отметим, что, согласно (10), стабилизация не требует большой кривизны и возможна и в приосевой области. Условие (6) на $B^{\alpha-1}\partial B/\partial\psi$ мягче неравенства $\partial(\psi B^{\alpha-1}\partial B/\partial\psi)/\partial\psi > 0$, выполнение которого обеспечивало бы (аналогично [2]) подавление первой моды в системе с анизотропной плазмой без компенсирующей ловушки *2*.

При компенсации общей кривизны, то-есть занулении вклада в W от старшего, не зависящего от ψ члена в $\partial B/\partial\psi$, неравенство (10), а в общем случае (6), обеспечивает среднюю магнитную яму, поскольку производная $\partial^2 B/\partial\psi^2 > (1-\alpha)B^{-1}(\partial B/\partial\psi)^2$ положительна.

Литература

1. *Rosenbluth M.N., Longmire C.* Ann. Phys., 1957, 1, 120.
2. *Рютов Д.Д., Ступаков Г.В.* Письма в ЖЭТФ, 1985, 42, 29.
3. *Kruskal M.D., Oberman C.R.* Phys. Fluids, 1958, 1, 275.
4. *Арсенин В.В.* Письма в ЖЭТФ, 1983, 37, 534.

Поступила в редакцию
27 января 1986 г.