

ТЕРМОДИНАМИКА ДВУМЕРНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю.А.Бычков

Предложен метод вычисления статистической суммы двумерного электронного газа в сильном магнитном поле. Для потенциалов взаимодействия между частицами, мало меняющихся на магнитной длине получено явное выражение для величин, описывающих обменные эффекты при температуре $T \rightarrow 0$.

После открытия дробного квантового эффекта Холла (ДКЭХ) ¹ появилось много работ, посвященных объяснению этого до сих пор загадочного явления. Не перечисляя все подходы, включающие известный метод пробных функций Лафлина ², отметим рассмотренный в ^{3, 4} метод статистической суммы (СС). С другой стороны, авторы ⁵ предложили принципиально новый подход к проблеме ДКЭХ. С помощью метода интегрирования по путям в ⁵ исследован вопрос о наличии в свободной энергии как функции плотности частиц особенностей, обусловленных обменными эффектами. В настоящей работе с помощью метода, отличного от ⁵, получены результаты, пересекающиеся с результатами этой работы. Разработанный ниже метод основан на прямом вычислении СС взаимодействующих частиц в сильном магнитном поле H .

Задача состоит в нахождении СС системы

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad \beta = 1/T, \quad (1)$$

где E_n – собственные значения энергии взаимодействующих частиц на низшем уровне Ландау. Предполагается, что взаимодействие не переводит частицы на другие уровни (характерная энергия парного взаимодействия гораздо меньше $\hbar\omega_c$, ω_c – циклотронная частота). В этом случае правая часть (1) есть

$$\sum_n \left\{ 1 - \beta V_{nn} + \frac{\beta^2}{2!} \sum_m V_{nm} V_{mn} \dots \right\}, \quad (2)$$

V – потенциальная энергия взаимодействия частиц, а состояния n, m отвечают низшему уровню Ландау. В калибровке для векторного потенциала $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \times \mathbf{r}$ соответствующие нормированные одночастичные волновые функции есть

$$\psi_m(z) = (2\pi 2^m m!)^{-1/2} z^m e^{-|z|^2/4}, \quad (3)$$

где $z = x + iy$, а магнитная длина $l_H = (c\hbar/eH)^{1/2}$ положена равной единице.

Проектирование матричных элементов взаимодействия на низший уровень Ландау приводит к следующему явному виду для произвольного члена ряда (2):

$$\frac{\beta^l}{l!} (-1)^l \int \prod_{i=1}^N d^2 z_i \prod_{j=1}^N d^2 z_{1j} \dots \prod_{k=1}^N d^2 z_{lk} V(z_1) V(z_2) \dots V(z_l) \times$$

$$\times g(z, z_1)g(z_1, z_2) \dots g(z_{l-1}, z_l)g^{(A)}(z_l, z'). \quad (4)$$

Здесь $d^2z = dx dy$, $z = \{z_1, \dots, z_N\}$, N — число частиц, $V(z) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U(|z_i - z_j|)$,

$$g(z, z') = \sum_n \Psi_n(z) \Psi_n^*(z'), \quad g^{(A)}(z, z') = \sum_n \Psi_n^{(A)}(z) \Psi_n^{(A)*}(z'). \quad (5)$$

В (5) функции $\Psi_n(z)$ соответствуют набору ортонормированных N — частичных волновых функций на низшем уровне Ландау без учета принципа Паули, в то время как функции $\Psi_n^{(A)}(z)$ являются антисимметричными относительно перестановок частиц. В выражении (4) действительно достаточно ввести одну функцию $g^{(A)}(z_l, z)$, так как матричные элементы взаимодействия отличны от нуля только между волновыми функциями с одинаковой перестановочной симметрией.

С помощью выражения (3) нетрудно убедиться в том, что

$$g(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi)^N} \exp\left(\frac{1}{2} z_1 z_2^* - \frac{1}{4} |z_1|^2 - \frac{1}{4} |z_2|^2\right), \quad (6)$$

где $z_1 z_2^* = \sum_{i=1}^N z_{1i} z_{2i}^*$, $|z|^2 = \sum_{i=1}^N |z_i|^2$. Функции $g(z_1, z_2)$ и $g^{(A)}(z_1, z_2)$ связаны друг с другом достаточно очевидным соотношением:

$$g^{(A)}(z_1, z_2) = \frac{1}{N!} \sum_P \text{sign}(P) g(z_1, Pz_2). \quad (7)$$

В (7) P — произвольная перестановка переменных $\{z_{2i}\}$, а $\text{sign}(P)$ — ее знак.

Входящее в (4) произведение g -функций имеет вид:

$$\sum_P \text{sign}(P) \exp\left\{-\frac{1}{4} |z - z_1|^2 - \frac{1}{4} |z_1 - z_2|^2 - \dots - \frac{1}{4} |z_l - Pz|^2 - \frac{i}{2} \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_{1i} + \mathbf{r}_{1i} \times \mathbf{r}_{2i} + \dots + \mathbf{r}_{li} \times P\mathbf{r}_i] \mathbf{n}\right\}, \quad (8)$$

где \mathbf{r}_j — двумерный радиус-вектор j -ой частицы, перпендикулярный $\mathbf{n} = \mathbf{H}/H$. Поскольку все характерные разности $|z_j - z_m| \sim 1$, то в случае медленно меняющегося на масштабе l_H потенциала в (4) можно положить $V(z_1) = V(z_2) = \dots = V(z_l)$ (характерный масштаб интегрирования есть радиус действия потенциала $a \gg l_H$). Для такого класса потенциалов простые вычисления приводят к следующему виду для СС:

$$Z = \frac{1}{N!} \sum_P \text{sign}(P) \int \prod_{i=1}^N \frac{d^2z_i}{2\pi} \exp\left[\frac{1}{2} z(Pz)^* - \frac{|z|^2}{2} - \beta V(z)\right]. \quad (9)$$

Стоящее под знаком интегрирования выражение зависит только от класса перестановок симметрической группы. Как известно ⁶, класс перестановок определяется набором циклов перестановок $\{\alpha\}$, таких что

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + N\alpha_N = N, \quad \text{sign}(P) = (-1)^{\alpha_2 + \alpha_4 + \dots}, \quad (10)$$

где α_n — число циклов длиной n в $\{\alpha\}$. Число перестановок в классе $\{\alpha\}$ есть:

$$N! (\alpha_1! 2^{\alpha_2} \alpha_2! \dots N^{\alpha_N} \alpha_N!)^{-1}. \quad (11)$$

С учетом (10) и (11) выражение (9) принимает вид:

$$Z = \sum_{\{\alpha\}} \frac{(-1)^{\alpha_2 + \alpha_4 + \dots}}{\alpha_1! 2^{\alpha_2} \alpha_2! \dots} \int \prod_{i=1}^N \frac{d^2z_i}{2\pi} \exp\left[\frac{1}{2} z(P_{\{\alpha\}} z)^* - \frac{|z|^2}{2} - \beta V(z)\right]. \quad (12)$$

Циклу $(1 \dots m)$ под знаком экспоненты в (12) соответствует выражение

$$-\frac{1}{4} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - \frac{1}{4} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)^2 - \dots - \frac{1}{4} (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_1)^2 - \frac{i}{2} [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_m \times \mathbf{r}_1] \mathbf{n}. \quad (13)$$

Мнимая часть в (13) описывает эффект соизмеримости (см. ⁴). Для свободных частиц с помощью перехода к большому каноническому ансамблю ⁷ легко получить все термодинамические величины.

В заключение укажем на способ перехода к результатам работы ⁵. В случае очень низких температур будем считать, что интегрирование в (12) определяется множителем $e^{-\beta V}$ и предположим, что

$$e^{-\beta V} \simeq e^{-\beta E_0} \rho(z_1, \dots, z_N) \quad (14)$$

где E_0 — энергия классического вигнеровского кристалла, а функция ρ соответствует расположению частиц в узлах решетки (δ — образная функция). В результате интегрирования точки r_i в (13) расположены в узлах решетки. При $\nu \rightarrow 1$ (ν — степень заполнения уровня Ландау) для выполнения приближения (14) требуются все большие β , а при $\nu = 1$ оно вообще несправедливо, так как в этом случае система является жидкостью (см. также ⁸). При суммировании по ближайшим узлам каждому циклу длины m соответствует множитель

$$\exp[-\alpha m + i\pi + i\pi(\nu^{-1} - 1)N_A], \quad (15)$$

где первый член в скобках описывает перекрытие волновых функций, а остальные соответствуют мнимой части в (13) с учетом знака перестановки. В (15) $N_A = \pm (\nu S / \pi l_H^2)$, где S — площадь, охватываемая перестановочным циклом (учтен знак ее обхода). Для гексагональной решетки $\alpha = (\pi/\nu\sqrt{3})$.

Благодарю Д.Е.Хмельницкого за очень ценное обсуждение работы.

Литература

1. Tsui D.C., Störmer H.L., Gossard A.C. Phys. Rev. Lett., 1982, **48**, 1959.
2. Laughlin R.B. Phys. Rev., 1983, **B27**, 3383.
3. Tosatti E., Parinello M. Lett. Nuov. Cim., 1983, **36**, 289.
4. Girvin S.M., Jach T. Phys. Rev., 1984, **B29**, 5617.
5. Kivelson S., Kallin C., Arovas D., Schrieffer J.R. (preprint, 1985).
6. Мурнаган Ф. Теория представлений групп. М.: ИИЛ, 1950.
7. Фейнман Р. Статистическая механика. М.: Изд. "Мир", 1975.
8. Fukuyama H., Platzman P.M., Anderson P.W. Phys. Rev., 1979, **B19**, 5211.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
6 февраля 1986г.