Письма в ЖЭТФ, том 43, вып. 7, стр. 319 – 321 *10 апреля 1986 г.*

ДВУХ- И ТРЕХПЕТЛЕВЫЕ АМПЛИТУДЫ В ТЕОРИИ БОЗОННЫХ СТРУН

А.А.Белавин В.Г.Книжник, А.Ю.Морозов, А.М.Переломов

Получены явные формулы для двух- и трехпетлевых вакуумных амплитуд в теории замкнутых ориентированных бозонных струн при $D = 26$ через тэта-константы; пространство модулей параметризовано матрицами периодов.

Задача вычисления многопетлевых амплитуд в теории струн в последнее время привлекла к себе большое внимание. Основной "практической" целью этих исследований является доказательство конечности теории суперструн, хотя не исключено, что полное понимание структуры многопетлевых поправок позволит продвинуться и в решении других вопросов. Так или иначе, на этом пути модель замкнутых ориентируемых бозонных струн (ESVM) является хорошей лабораторией.

В этой статье мы приведем явные формулы для двух- и трехпетлевых вакуумных амплитуд в ESVM в критической размерности $D = 26$. Как было показано в работах [1], эта задача сводится к отысканию меры на пространстве M_p комплексных структур римановых поверхностей рода p (в этой работе $p = 2,3$), которое, как известно, при $p \geqslant 2$ имеет размерность $6p - 6$ и является комплексным многообразием. В работе [2] были выяснены аналитические свойства искомой меры, как функции комплексных координат $y_1, ..., y_{3p-3}$ на M_p, и было показано, что найденные свойства определяют меру однозначно с точностью до постоянного множителя. Основная трудность при описании явной формулы для меры в случае произвольного p состоит в том, что отсутствует хорошая параметризация пространства M_p. Однако, в случае $p = 2, 3$ (и, конечно, $p = 1$) комплексные структуры можно параметризовать матрицами периодов. Это, вместе с найденными в [2] аналитическими свойствами меры, позволяет выразить ее через тэта-константы.

1. **Аналитические свойства меры** [2]. Комплексные координаты y_i в пространстве M_p вводятся следующим образом [3]. Рассмотрим некоторую риманову поверхность S_p рода $p \geqslant 2$ с координатами ξ^1, ξ^2 и метрикой $ds^2 = g_{ab} d\xi^a d\xi^b$. С этой метрикой согласована комплексная структура $J_a^{(0)\,b} = \epsilon_{ac} g^{cb} \sqrt{g}$ и в гармонических координатах $z, \bar{z}$, удовлетворяющих уравнению $\partial z/\partial \xi^a = i J_a^{\ b}\, \partial z/\partial \xi^b$, метрика имеет вид $ds^2 = \rho\, dz\, d\bar{z}$. Выберем теперь некоторый базис $f_i(z)(dz)^2$, $i = 1, ..., 3p - 3$ в пространстве голоморфных квадратичных дифференциалов на S_p и дуальный ему базис $\eta^k(z, \bar{z}) \frac{d\bar{z}}{dz}$, $k = 1, ..., 3p - 3$ в пространстве дифференциалов Бельтрами: $\int \eta^k f_j d^2\xi = \delta_j^k$. Тогда [2] все комплексные структуры близкие к $J^{(0)}$ могут быть параметризованы координатами $y_i, \bar{y}_i$ так, что комплексная структура с координатами $y_i, \bar{y}_i$ является согласованной с метрикой $ds^2(y) = \rho |dz + y_i \eta^i d\bar{z}|^2$. Известно, [3], что $y_i, \bar{y}_i$ являются комплексноаналитическими координатами на M_p. В [2] было показано, что мера в ESVM имеет вид

$$Z_p = \int_{M_p} d\mu_p, \quad d\mu_p = F(y) dv \wedge \overline{F(y) dv} (\det \operatorname{Im} \tau)^{-13} \tag{1}$$

$$dv = dy_1 \wedge ... \wedge dy_{3p-3}; \quad p \geqslant 2,$$

где τ – матрица периодов (см. ниже), а $F(y)dv$ – голоморфная на M_p $(3p - 3,0)$ – форма, нигде не обращающаяся в ноль и имеющая полюс 2 порядка на бесконечностях D_q, $q = 0, 1, ..., [p/2]$ пространства M_p, где поверхность S_p распадается на поверхность рода q и $p - q$; D_0 содержит поверхности с вырожденной ручкой.

2. **Пространства M_2 и M_3**. Матрица периодов τ определяется следующим образом. Рассмотрим на поверхности S_p рода p симплектический базис из $2p$ циклов (замкнутых нестягиваемых путей) $a_i, b_i, i = 1, ..., p$:

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad i \neq j; \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}, \tag{2}$$

где $\circ$ обозначает алгебраическое число пересечений циклов. С базисом $\{a_i, b_i\}$ связан базис $\omega_i = \varphi_i(z)dz$, $i = 1, \dots, p$ голоморфных 1-дифференциалов, удовлетворяющих условиям

$$\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}. \tag{3}$$

Матрица

$$\tau_{ij} = \oint_{b_i} \omega_j \tag{4}$$

называется матрицей периодов поверхности S_p. Известно, что

$$\tau_{ik} = \tau_{ki}, \quad \operatorname{Im}\tau > 0, \tag{5}$$

т. е. матрицы τ лежат в пространстве H_p всех матриц, удовлетворяющих (5). Нетрудно показать, что симплектический базис $\{a_i, b_i\}$ условиями (2) определяется однозначно, и одной и той же комплексной структуре могут соответствовать матрицы, получающиеся друг из друга преобразованиями из модулярной группы $\Gamma_p = \mathrm{Sp}(p, \mathbb{Z})$ целочисленных $2p \times 2p$ матриц $M = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$, удовлетворяющих $\mathrm{AB}^{\mathrm{T}} - \mathrm{BA}^{\mathrm{T}} = \mathrm{CD}^{\mathrm{T}} - \mathrm{DC}^{\mathrm{T}} = 0$, $\mathrm{AD}^{\mathrm{T}} - \mathrm{BC}^{\mathrm{T}} = 1$. Γ_p действует на H_p согласно

$$M(\tau) = (\mathrm{A}\tau + \mathrm{B})(\mathrm{C}\tau + \mathrm{D})^{-1}. \tag{6}$$

Комплексная размерность H_p, равная $p(p+1)/2$, для $p = 1, 2, 3$ совпадает с размерностью M_p и в этих случаях M_p может быть представлено фундаментальной областью $\mathfrak{S}_p = H_p/\Gamma_p$ модулярной группы Γ_p в верхней полуплоскости Зигеля H_p, т. е.

$$M_p = \mathfrak{S}_p, \quad p = 1, 2, 3.$$

3. **Мера для** $p = 2, 3$. Результаты приведенные в п. 1, 2 позволяют искать меру в виде:

$$d\mu_p = d\nu_p \, |\chi_{12-p}(\tau)|^{-2} (\det \operatorname{Im}\tau)^{p-12}. \tag{7}$$

Здесь

$$d\nu_p = \prod_{k \leqslant j} \frac{i}{2} d\tau_{kj} \wedge d\overline{\tau}_{kj} (\det \operatorname{Im}\tau)^{-(p+1)} \tag{8}$$

является модулярно-инвариантной мерой на H_p. Из условия инвариантности (7) при модулярных преобразованиях (6) следует:

$$\chi_{12-p}(M(\tau)) = [\det(\mathrm{C}\tau + \mathrm{D})]^{12-p} \chi_{12-p}(\tau). \tag{9}$$

Таким образом, для $p = 2$, χ_{10} является модулярной формой веса 10, не имеющей нулей внутри $\mathfrak{S}_2$. Кроме того, на бесконечности D_0 (τ_{11} или $\tau_{22} \to i\infty$) мера $\prod_{i \leqslant j} d\tau_{ij}$ имеет полюс 1 порядка. Поэтому, из аналитических свойств меры [2] приведенных в п. 1, следует, что форма χ_{10} имеет ноль 1 порядка на D_0 и 2 порядка на D_1 ($\tau_{12} \to 0$), т. е. является параболической. Весом и порядком и положением нулей форма χ_{10} определяется однозначно и равна [4]:

$$\chi_{10}(\tau) = \prod_{\mathbf{m}} \theta^2_{\mathbf{m}}(\tau), \tag{10}$$

где тэта-константы определяются следующим образом:

$$\theta_{\mathbf{m}}(\tau) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^p} \exp\left\{\pi i \left(\mathbf{n} + \frac{\mathbf{m}'}{2}\right)^{\mathrm{T}} \tau \left(\mathbf{n} + \frac{\mathbf{m}'}{2}\right) + 2\pi i \left(\mathbf{n} + \frac{\mathbf{m}'}{2}\right)^{\mathrm{T}} \frac{\mathbf{m}''}{2}\right\} \tag{11}$$

$$\mathbf{m} \equiv (\mathbf{m}', \mathbf{m}''),$$

$p = 2$, а компоненты векторов $\mathbf{m}', \mathbf{m}''$ характеристики $\mathbf{m}$ принимают значения 0, 1; число $e(\mathbf{m}) = (\mathbf{m}')^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{m}'' \,(mod\ 2)$ называется четностью характеристики $\mathbf{m}$ и в (10) произведение берется по всем четным характеристикам. Для рода p имеется $2^{p-1}(2^p + 1)$ четных и $2^{p-1}(2^p - 1)$ нечетных характеристик и $\theta_{\mathbf{m}} \equiv 0$ при $e(\mathbf{m}) = 1$. С помощью (11) нетрудно проверить, что χ_{10} имеет ноль 1 порядка на D_0 и 2 порядка на D_1. Можно также показать, что χ_{10} не обращается в ноль внутри $\mathfrak{S}_2$. Аналогичная формула имеет место и для $p = 3$:

$$\chi_9^2(\tau) = \prod_{\mathbf{m}} \theta_{\mathbf{m}}(\tau), \tag{12}$$

где произведение опять берется по всем четным характеристикам, которых теперь 36. Доказательство мы опускаем за недостатком места. Формулы (7), (10), (12) решают задачу вычисления меры в ESVM для рода $p = 2, 3$[1].

Укажем также, что в случае рода 2 пространство M_2 можно параметризовать координатами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ точек ветвления кривой

$$y^2 = z(z-1)(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3) \tag{13}$$

В $\mathbb{C}^2 = (y, z)$. В этих координатах мера имеет вид

$$d\Omega = \prod_{i \leqslant j} d\tau_{ij}(\chi_{10}(\tau))^{-1} = d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 [\chi_{10}(\tau)]^{-13/10}((\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \times$$
$$\times (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3))^{-2/5}, \tag{14}$$

где τ определяется по $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ гиперэллиптическими интегралами. В статсумме

$$Z_3 = \int d\Omega \wedge \overline{d\Omega}\,(\det \operatorname{Im}\tau)^{-13} \tag{15}$$

можно интегрировать по каждому $d^2\lambda_i$ по всей комплексной плоскости, так как при этом мы учтем каждую поверхность *конечное* число раз (в общем случае 720).

Авторы признательны А.Бейлинсону за обсуждение.

Литература

1. *Friedan D.* In Rec. Adv. in FTSM(Les Houch. Summer, 1982,), North-Holl., 1984; *Alvarez O.* Nucl. Phys., 1983, **B216,** 125.
2. *Белавин А.А., Книжник В.Г.* Препринт ИТФ, Черноголовка, 1986; ЖЭТФ, в печати.
3. *Bers L.* Bull. Am. Math. Soc. (N.S.), 1981, **5,** 131.
4. *J.-I.Igusa.* Am. J. Math., 1962, **84,** 175.
5. *Манин Ю.И.* Письма в ЖЭТФ, 1986,

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
28 февраля 1986 г.